Urejenosti

Relacija $(M, \preceq)$ je **delna urejenost**, če veljajo naslednje tri lastnosti:

- **refleksivnost:** $\forall a \in M : a \preceq a$
- **antisimetričnost:** $\forall a, b \in M : a \preceq b \text{ in } b \preceq a \Rightarrow a = b$
- **tranzitivnost:** $\forall a, b, c \in M : a \preceq b \text{ in } b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$

Linearna urejenost je sovisna delna urejenost.

Zgled: Relacija $\leq$ na množicah $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ je linearna urejenost.

Naloga 1 *Naj bo A neprazna množica. Pokaži, da je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ delna urejenost.*

Naloga 2 *Pokaži, da je množica deliteljev $D(n)$ naravnega števila n z relacijo deljivosti $|$ delna urejenost.*

Elementa $x, y \in M$ sta **primerljiva**, če je $x \preceq y$ ali $y \preceq x$, sicer sta **neprimerljiva**.

Če $x \preceq y$ ter $x \neq y$, potem pišemo tudi $x \prec y$.

Element x je **neposredni predhodnik** y oz. y je **neposredni naslednik** x, če

- $x \prec y$,
- ne obstaja "vmesni" element, tj. ne obstaja element $z \in M$ tako, da je $x \prec z \prec y$.

Element $a \in M$ je **minimalen**, če

$$\forall x \in M : (x \preceq a \;\Rightarrow\; x = a)\,.$$

Element $a \in M$ je **maksimalen**, če

$$\forall x \in M : (a \preceq x \;\Rightarrow\; x = a)\,.$$

Element $a \in M$ je **prvi** oz. **najmanjši**, če

$$\forall x \in M : a \preceq x\,.$$

Element $a \in M$ je **zadnji** oz. **največji**, če

$$\forall x \in M : x \preceq a\,.$$

Trditev 1 *V delni urejenosti* $(M, \preceq)$ *velja:*

1. *Če je* $a \in M$ *prvi, potem je minimalen;*
2. *Če je* $a \in M$ *zadnji, potem je maksimalen;*
3. *Če sta* $a_1, a_2 \in M$ *prva, potem* $a_1 = a_2$*;*
4. *Če sta* $a_1, a_2 \in M$ *zadnja, potem* $a_1 = a_2$*.*

Dokaz.

Trditev 2 *V linearni urejenosti* $(M, \preceq)$ *velja:*

1. *Če je* $a \in M$ *minimalen, potem je prvi;*
2. *Če je* $a \in M$ *maksimalen, potem je zadnji.*

Dokaz.

Hassejev diagram

Hassejev diagram delne urejenosti $(M, \preceq)$ je risba, pri kateri elemente množice A predstavimo s točkami v ravnini tako, da za poljubne $a, b \in M$ velja

- če $a \preceq b$, potem b leži "nad" a;
- a in b povežemo, če je a neposredni predhodnik b-ja.

Naloga 3 *Nariši Hassejev diagram delne urejenosti* $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Naloga 4 *Nariši Hassejev diagram delne urejenosti* $(D(60), |)$.

Inverzna urejenost

Inverz urejenosti $\preceq$ označimo z $\succeq$, tj.

$$\succeq \; := \; \preceq^{-1}$$

Trditev 3 *Če je $(M, \preceq)$ delna urejenost, potem je tudi $(M, \succeq)$ delna urejenost. Velja še:*

1. *če je x minimalen za $\preceq$, potem je x maksimalen v $\succeq$;*
2. *če je x prvi za $\preceq$, potem je x zadnji v $\succeq$.*

Vprašanje 1 *Če je $(M, \preceq)$ linearna urejenost, ali je potem tudi $(M, \succeq)$ linearna urejenost?*

Produkt urejenosti

Za delni urejenosti $(M_1, \preceq_1)$ in $(M_2, \preceq_2)$ lahko definiramo urejenost $(M_1, \preceq_1) \times (M_2, \preceq_2)$ z množico $M_1 \times M_2$ ter relacijo

$$(x_1, x_2) \;\preceq\; (y_1, y_2) \quad \equiv \quad x_1 \preceq_1 y_1 \;\text{ in }\; x_2 \preceq_2 y_2$$

Zgled: $(\mathbb{N}, \leq) \times (\mathbb{N}, \leq)$

Trditev 4 *Če sta $(M_1, \preceq_1)$ in $(M_2, \preceq_2)$ delni urejenosti, potem je tudi $(M_1, \preceq_1) \times (M_2, \preceq_2)$ delna urejenost.*

Leksikografska urejenost

Naj bo $(M, \preceq)$ linearna urejenost. **Leksikografsko** urejenost $\leq_{\text{lex}}$ na množici $M \times M$ definiramo takole:

$$(m_1, n_1) \preceq_{\text{lex}} (m_2, n_2) \quad \equiv \quad m_1 \prec m_2 \;\vee\; (m_1 = m_2 \wedge n_1 \preceq n_2)$$

Zgled: $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{\text{lex}})$

Trditev 5 $(M \times M, \preceq_{\text{lex}})$ *je linearna urejenost.*

Zgled: Slovarček

Druge urejenosti

Med tranzitivnimi relacijami, poleg linearne ter delne urejenosti, nas običajno zanimajo še:

1. **navidezna urejenost:** tranzitivnost + refleksivnost;
2. **šibka urejenost:** tranzitivnost + stroga sovisnost;
3. **polurejenost:** tranzitivnost + antisimetričnost;
4. **stroga delna urejenost:** tranzitivnost + irefleksivnost;
5. **stroga linearna urejenost:** tranzitivnost + irefleksivnost + sovisnost;

Lastnosti:

1. Če je R nekakšna urejenost, potem je R^{-1} urejenost istega tipa.

2. Naj bo R nekakšna urejenost na A ter naj bo $B \subseteq A$. **Zožitev** $R_{|B} := R \cap B \times B$ je urejenost iste vrste.

3. Če je relacija R polurejenost, je $R \cup I$ delna urejenost in $R \setminus I$ stroga delna urejenost.

4. Naj bo R navidezna urejenost, potem je $R \cap R^{-1}$ enakovrednost.

Topološko urejanje

Naj bo $(M, \preceq)$ polurejenost, kjer je M končna. **Pravilno oštevilčenje** je preslikava $i : M \to \{1, \ldots, |M|\}$, za katero velja:

$$x \neq y \;\Rightarrow\; i(x) \neq i(y) \quad \text{in} \quad x \prec y \;\Rightarrow\; i(x) < i(y)$$

Izrek 6 *Vsako končno polurejeno množico lahko pravilno oštevilčimo.*

Dokaz. Pravilno oštevilčenje dobimo z naslednjim postopkom:

$S := M; j := 0;$

while $S \neq \emptyset$ **do**

  izberi: x je minimalni element S;

  $j := j + 1;$

  $i(x) := j;$

  $S := S \setminus \{x\};$

end

$\square$

Pravilnemu oštevilčenju ustreza urejanje oz. sortiranje elementov v vrsto

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{|M|}$$

tako, da mora za $a_i \prec a_j$ veljati $i < j$. Takemu sortiranju rečemo **topološko urejanje**.

Supremum in Infimum

Najmanjša zgornja meja $\sup(a, b)$ elementov a ter b je element $\gamma \in M$, za katerega velja:

- $a \preceq \gamma$ in $b \preceq \gamma$;
- če za poljuben $x \in M$ velja $a \preceq x$ in $b \preceq x$, potem $\gamma \preceq x$.

Največja spodnja meja $\inf(a, b)$ elementov a ter b je element $\lambda \in M$, za katerega velja:

- $\lambda \preceq a$ in $\lambda \preceq b$;
- če za poljuben $x \in M$ velja $x \preceq a$ in $x \preceq b$, potem $x \preceq \lambda$.

Trditev 7 *V delni urejenosti so naslednje trditve enakovredne:*

$$a \preceq b \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \inf(a, b) \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \sup(a, b)$$

Mreže

Relacijska definicija

Definicija R. Delna urejenost $(M, \preceq)$ je **mreža**, če za vsak par $a, b \in M$ obstajata elementa:

- $\sup\{a, b\}$
- $\inf\{a, b\}$.

Zgled: Delna urejenost $(D(n), |)$ je mreža in za vsak $a, b \in D(n)$ velja

$$\inf(a, b) = \gcd(a, b) \quad \text{in} \quad \sup(a, b) = \operatorname{lcm}(a, b).$$

Zgled: Delna urejenost $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je mreža, za vsak $X, Y \subseteq A$ pa velja:

$$\inf(X, Y) = X \cap Y \quad \text{in} \quad \sup(X, Y) = X \cup Y.$$

Algebrska definicija

Definicija A. Algebrajska struktura $(M, \vee, \wedge)$ je **mreža**, če veljajo naslednje lastnosti:

- **idempotentnost:** $$\begin{aligned} a \vee a &= a \\ a \wedge a &= a \end{aligned}$$

- **komutativnost:** $$\begin{aligned} a \vee b &= b \vee a \\ a \wedge b &= b \wedge a \end{aligned}$$

- **asociativnost:** $$\begin{aligned} (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) \\ (a \wedge b) \wedge c &= a \wedge (b \wedge c) \end{aligned}$$

- **absorpcija:** $$\begin{aligned} a \vee (a \wedge b) &= a \\ a \wedge (a \vee b) &= a \end{aligned}$$

Zgled: Izjavni račun $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ je mreža.

Zveza med algebrajsko ter relacijsko definicijo mreže

Velja naslednje:

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad (\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a)$$

ter

$$\sup\{a, b\} = a \vee b \quad \text{in} \quad \inf\{a, b\} = a \wedge b.$$

Podmreže

Naj bo $(M, \vee, \wedge)$ mreža ter N neprazna podmnožica v M tako, da velja pogoj

$$\forall a, b \in N : a \vee b \in N \ \text{ in } \ a \wedge b \in N.$$

Potem rečemo, da je $(N, \vee, \wedge)$ **podmreža** v $(M, \vee, \wedge)$.

Interval med $a, b \in M$ je

$$[a, b] = \{x : a \preceq x \preceq b\}.$$

Omejenost in komplementarnost

Mreža je **omejena**, ko v njej obstaja največji element 1 in najmanjši element 0:

$$\forall a : 0 \preceq a \preceq 1,$$

oz. ekvivalentno:

$$0 \vee a = a \quad \text{in} \quad 0 \wedge a = 0$$

$$1 \vee a = 1 \quad \text{in} \quad 1 \wedge a = a.$$

Trditev 8 *Vsaka končna mreža je omejena.*

Dokaz.

$\square$

V omejeni mreži je element b **komplement** elementa a, če velja

$$a \vee b = 1 \quad \text{in} \quad a \wedge b = 0.$$

Mreža je **komplementarna**, če ima vsak element komplement.

Opomba 1 *V splošnem ima element lahko več komplementov.*

Homomorfizem mrež

Naj bosta $(M, \vee, \wedge)$ ter $(N, \sqcup, \sqcap)$ mreži. Preslikava $h : M \to N$ je **homomorfizem mrež**, če $\forall x, y \in M$ velja

$$h(x \vee y) = h(x) \sqcup h(y) \quad \text{in} \quad h(x \wedge y) = h(x) \sqcap h(y).$$

Kadar je h bijekcija, imamo **izomorfizem mrež**.

Če sta M ter N omejeni mreži, potem surjektivni homomorfizem h ohranja "mejne" elemente:

$$h(0_M) = 0_N \quad \text{in} \quad h(1_M) = 1_N.$$

Distributivne mreže

Mreža je **distributivna**, če veljata oba distributivnostna zakona:

(D1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(D2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Trditev 9 *Če v mreži* $(M, \vee, \wedge)$ *velja eden od zakonov* $(D1)$ *in* $(D2)$*, potem velja tudi drugi.*

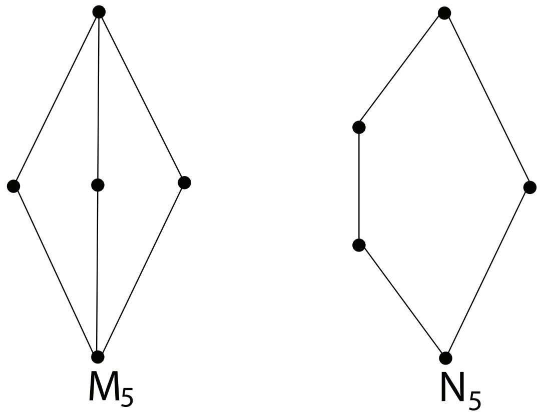
Dokaz. Predpostavimo, da velja $(D1)$ ter izpeljimo $(D2)$:

$$\begin{aligned}
a \vee (b \wedge c) &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\
&= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\
&= a \vee ((c \wedge a) \vee (c \wedge b)) \\
&= a \vee (c \wedge (a \vee b)) \\
&= a \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
&= (a \wedge (a \vee b)) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
&= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
&= (a \vee b) \wedge (a \vee c)
\end{aligned}$$

Podobno pokažemo, da iz $(D2)$ sledi $(D1)$. □

Opis distributivnih mrež

Naloga 5 *Pokaži, da mreži M_5 in N_5 nista distributivni.*



Izrek 10 (Birkhoff) *Mreža je distributivna natanko takrat, ko ne vsebuje M_5 in N_5 kot podmreže.*

Booleova algebra

Komplementarni distributivni mreži rečemo **Booleova algebra**.

Trditev 11 *V Booleovi algebri ima vsak element natanko en komplement.*

Dokaz. Recimo, da sta b in c komplementa elementa a. Tedaj velja

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &= b \wedge (a \vee c) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \\ &= 0 \vee (b \wedge c) \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \vee b) \wedge c \\ &= 1 \wedge c \\ &= c \end{aligned}$$

□

Komplement elementa a označimo z $\neg a$.

Booleovo algebro označimo z $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg)$.

Trditev 12 *Naj bo $h : B_1 \to B_2$ izomomorfizem Booleovih algeber. Potem velja*

$$\forall x \in B_1 : h(\neg x) = \neg h(x).$$

De Morganova zakona

Trditev 13 *V Booleovi algebri veljata De Morganova zakona:*

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \quad \textit{in} \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

Dokaz. Pokažimo le prvi zakon, dokaz drugega je analogen. Za dokaz bo dovolj, če preverimo naslednji zvezi:

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = 0$$

ter

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1$$

Prvo zvezo izpeljemo takole:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= a \wedge (b \wedge (\neg a \vee \neg b)) \\
&= a \wedge [(b \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg b)] \\
&= a \wedge b \wedge \neg a \\
&= b \wedge 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Zdaj pa še drugo zvezo, pa bo konec dokaza:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &= ((a \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg a)) \vee \neg b \\
&= (1 \wedge (b \vee \neg a)) \vee \neg b \\
&= b \vee \neg b \vee a \\
&= 1 \vee a \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Dualnost

Naj bo $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg)$ Booleova algebra.

Lahko priredimo novo algebro $\mathcal{B}^* = (B, \wedge, \vee, \neg)$.

Velja:

- 0 v $\mathcal{B}$ je 1 v $\mathcal{B}^*$;
- 1 v $\mathcal{B}$ je 0 v $\mathcal{B}^*$;
- $\vee$ v $\mathcal{B}$ je $\wedge$ v $\mathcal{B}^*$;
- $\wedge$ v $\mathcal{B}$ je $\vee$ v $\mathcal{B}^*$;

Vprašanje 2 *Kako dobimo Hassejev diagram algebre $\mathcal{B}^*$ iz diagrama algebre $\mathcal{B}$?*

Opomba 2 *Za vsako trditev $\mathcal{T}$ obstaja dualna trditev $\mathcal{T}^*$, ki jo dobimo iz $\mathcal{T}$ tako, da zamenjamo $\vee$ and $\wedge$. Opazimo, da je $(D_1)^* = (D_2)$ oz. $(D_2)^* = (D_1)$.*

Opis Booleovih algeber

Naloga 6 *Naj bo A množica. Preveri, da je $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$ Booleova algebra. Kako je definiran komplement $\neg X$ za poljubno množico $X \in \mathcal{P}(A)$?*

Izrek 14 (Stone) *Vsaka Booleova algebra je izomorfna Booleovi algebri $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$ za neko množico A.*

Vprašanje 3 *Ali obstaja Booleova algebra z 10 elementi?*