1. naloga: ali je funkcija f surjektivna, injektivna, bijektivna?

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f : (a, b, c) \longmapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right)$$

Fiksne točke funkcije f

$$f(T) = T$$
$$T = (a, a, a)$$

sur = ?

injekt = ?

$$(x, y, z) = f(a, b, c) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right)$$

sur + injekt = bijekt.

$$x = \frac{a+b}{2} \rightarrow a = 2x - b = x - y + z$$

$$y = \frac{b+c}{2} \rightarrow b = 2y - c = 2y - 2z + 2x - b$$

$$2b = 2y - 2z + 2x$$
$$b = y - z + x$$

$$z = \frac{c+a}{2} \rightarrow c = 2z - a$$
$$= z - x + y$$

Funkcija f je surjektivna, ker je vsaka trojica (x, y, z) slika neke trojice (a, b, c). Funkcija f je injektivna, ker je za dano trojico (x, y, z) trojica (a, b, c), za katero velja f(a, b, c) = (x, y, z), enolično določena (dobljeni sistem enačb ima natanko eno rešitev).

2. naloga: dokaži, da so sledeče tri trditve ekvivalentne.

$f: X \to X$

a) f je inj.

b) $\forall A, \forall B \subseteq X: f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

c) $\forall A, B \subseteq X: A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

b) $\Rightarrow$ c)

$A \cap B = \emptyset$

predpostavka pogojnega sklepa za poljubni množici $A, B \subseteq X$

Ker velja $f(\emptyset) = \emptyset$: $\Rightarrow f(A \cap B) = \emptyset$

Po točki b): $\Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

Po pogojnem sklepu smo dobili trditev točke c).

$a) \Rightarrow b)$

$$\forall x \forall y : \left(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \right)$$

Predpostavka (točka a): f je injektivna)

Ker za poljubni množici A, B v splošnem velja $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, dokažimo vsebovanost še v drugo smer, torej

$$\forall A, B \subseteq X \; \forall y : \left(y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A \cap B) \right)$$

$$y \in f(A) \cap f(B) \iff \exists x_a \in A \; \exists x_b \in B : \left(f(x_a) = y \wedge f(x_b) = y \right)$$

predpostavka PS za poljuben y in poljubni podmnožici A, B množice X

po definiciji slike množice

zaradi injektivnosti velja xa = xb in je ta element torej v preseku množic A in B

$$\Rightarrow \exists x \in A \cap B : \left(f(x) = y \right)$$

po definiciji slike množice

pogojni sklep

$$\iff y \in f(A \cap B) \quad \models \forall A, B \subseteq X : f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$$

z upoštevanjem vsebovanosti v drugo smer dobimo enakost, tj. trditev točke b)

$$\models \forall A, B \subseteq X : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$c) \Rightarrow a)$

$\forall A, B \subseteq X: (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset)$ predpostavka (točka c))

$A := \{x\}$ $B := \{y\}$

$f(x) = f(y)$ PPS za poljubna x, y

Vedno lahko iz danih elementov sestavimo množice, ki jih vsebujejo. Množici {x} in {y} smo poimenovali z A in B.

$\Rightarrow f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ MT po točki c)

$\Rightarrow x = y$ ker obstaja skupni element množic A in B

Ker smo naredili krog implikacij
a) => b) => c) => a),
iz vsake od trditev a), b) in c) sledita ostali dve - trditve so torej ekvivalentne.

Pogojni sklep: dobimo trditev točke a), tj. injektivnost.

$\forall x, y: (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

3. naloga: pokaži trditve o funkcijah f, g in njunem kompozitumu.
Ali implikacije veljajo tudi v nasprotno smer?

a) $f: X \rightarrow Y$

$g: Y \rightarrow Z$

Če f in g surj. je tudi g∘f surj.

$f(\cancel{X}) = Y$

$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$

$g(Y) = Z$

Če g∘f surjektivna

$\Rightarrow$ g surjektivna

$g \circ f: X \rightarrow Z$

$g \circ f(X) = Z$

b) $f: X \to Y$

$g: Y \to Z$

če f in g inj. je tudi $g \circ f$ inj.

$\forall x, x' \in X: (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

$\forall y, y' \in Y: (g(y) = g(y') \Rightarrow y = y')$

$g \circ f(x) = g \circ f(x') \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$g \circ f$ injektivna $\Rightarrow$ f injektivna

c) Po a) in b): če sta f in g bijektivni, je tudi g∘f bijektivna.

$g \circ f$ bijektivna $\Rightarrow$ f injektivna, g surjektivna

4. naloga

a) Zapiši permutacijo kot produkt disjunktnih ciklov

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi : i \mapsto (i \bmod 8) + 1$$

$$\Pi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$$

b) Izračunaj drugo in peto potenco permutacije

$$\Pi^2 = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6\ 8)$$

$$\Pi^5 = (1\ 6\ 3\ 8\ 5\ 2\ 7\ 4)$$

c) Določi red in parnost permutacij

Π je liha $\quad \mathrm{red}(\Pi) = 8$

Π^2 je soda $\quad \mathrm{red}(\Pi^2) = 4$

Π^5 je liha $\quad \mathrm{red}(\Pi^5) = 8$

5. naloga: izračunaj permutacije ter zanje določi red in parnost.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho = (1\,4\,2)(3\,5) \ \text{red: } 6$$

$$(1\,3\,2\,5)(4) \ \text{red: } 4 \qquad \rho^{-1} = (1\,2\,4)(3\,5) \ \text{red: } 6$$

$$\pi^{-1} = (1\,5\,2\,3)(4) \ \text{red: } 4$$

$$\rho \cdot \pi^2 \cdot \rho^{-1} = (1)(2\,4)(3\,5) \ \text{red: } 2$$

$$\pi \cdot \rho = (1\,5\,4\,2\,3) \ \text{red: } 5$$

π JE LIHA ρ JE LIHA

π^{-1} JE LIHA ρ^{-1} JE LIHA

$$\rho \cdot \pi = (1\,4\,5\,2\,3) \ \text{red: } 5$$

PREOSTALE SO SODE

6. naloga: dokaži, da lahko s cikloma (1 2) in (1 2 ,,, n) zapišeš poljubno permutacijo števil od 1 do n

$$\pi = (1\ 2) \qquad \pi^2 = id$$

$$\rho = (1\ 2\ \dots\ n)$$

$$\forall_{\substack{d \in S_n \\ i<j}} : d = f(\pi, \rho)$$

$$(1\,2)(2\,3) = (1\,3\,2)$$
$$(1\,3\,2)(3\,4) = (1\,4\,3\,2)$$
$$(1\,4\,3\,2)(2\,3) = (1\,4\,2)$$
$$(1\,4\,2)(2\,1) = (1\,4)$$

$$d_{k+1} := \rho^{-k} \pi \rho^{k} = (k+1\ \ k+2)$$

Ker lahko poljubno permutacijo zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov in lahko vsak cikel oblike (a0 a1 a2 ... an) zapišemo kot produkt transpozicij (a0 a1)(a0 a2)...(a0 an), je dovolj, če znamo izraziti poljubno transpozicijo

$$(i\ j)$$

$$\underbrace{d_i d_{i+1} \cdots d_{j-1}}_{(i\ i+1\ \dots\ j)^{-1}} \cdot \underbrace{d_{j-2} d_{j-3} \cdots d_i}_{(i\ i+1\ \dots\ j-1)} = (i\ j)$$