1. naloga: dokaži, da velja

$\varphi_1 \sim \varphi_2$ natanko tedaj, ko velja $\models \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$

($\Rightarrow$) $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ je tavtologija v vsaki interpretaciji

($\Leftarrow$) v vsaki interpretaciji velja $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$

$\Rightarrow \varphi_1 \sim \varphi_3$

2. naloga: katere izjavne formule so enakovredne?

$$\forall x : A(x) \Rightarrow \forall x : B(x)$$

$$\exists x : A(x) \Rightarrow \exists x : B(x)$$

$$\forall x \exists y : (A(x) \Rightarrow B(y))$$

$$\exists x \forall y : (A(x) \Rightarrow B(y))$$

$$\forall y \exists x : (A(x) \Rightarrow B(y))$$

$$\exists y \forall x : (A(x) \Rightarrow B(y))$$

S pretvorbo v preneksno obliko lahko dobimo obe formuli, podčrtani z isto barvo.

Zamenjava kvantifikatorjev je mogoča, ker na vsaki strani ekvivalence (disjunkcije!) nastopa samo ena od kvantificiranih spremenljivk.

3. naloga: ali sta formuli enakovredni?

$$\forall x \exists y : (A(x) \Leftrightarrow B(y))$$

$$\exists y \forall x : (A(x) \Leftrightarrow B(y))$$

nista enakovredni

$D = \{a, b\}$

$A(a) \quad B(a)$

$\neg A(a) \quad \neg B(a)$

Našli smo primer interpretacije, ko prva formula velja, druga pa ne.

V splošnem velja

$$\exists y \forall x : P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y : P(x, y)$$

zato primera, ko bi druga formula veljala, prva pa ne, nimamo.

4. naloga: ali sta izjavi splošno veljavni?

$$(\forall x : P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$(\exists x : P(x) \Rightarrow \exists x : Q(x)) \Rightarrow \forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$P(a) = 1$ $P(b) = 0$

$Q(a) = 0$ $Q(b) = 1$

$D = \{a, b\}$

nista splošno veljavni

Našli smo interpretacijo, v
kateri nobena od zgornjih izjav
ni pravilna.

5. naloga: zapiši negacijo izjave in najdi domeni, za kateri bosta izjava oziroma njena negacija resnični.

a) $\forall a \forall b : (a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0)$

$\exists a \exists b (a^2+b^2=0 \wedge a\neq 0 \wedge b\neq 0)$

1.) $\mathbb{R}$

Primer:

2.) $\mathbb{C}$ $a=1, b=i$

b) $\forall a \forall b : (ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0)$

$\exists a \exists b : (ab = 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0)$

1.) $\mathbb{C}$

2.) $\mathbb{Z}_{12}$ Primer: a = 3, b = 4

Lahko bi izbrali katerikoli kolobar z delitelji niča, npr. Z_n, kjer n > 1 ni praštevilo.

c) $\forall a \forall b \exists c : (a < b \Rightarrow (a < c \land c < b))$

$\exists a \exists b \forall c : (a < b \land (a \geq c \lor c \geq b))$

1/ $\mathbb{Q}$ Primer: c = (a+b)/2

2/ $\mathbb{Z}$ Primer: $a = 1$
$b = 2$

6. naloga: pokaži veljavnost sklepa ali navedi protiprimer

a) $\forall x : (T(x) \Rightarrow G(x)), \neg G(p) \models \neg T(p)$

1. $\forall x : (T(x) \Rightarrow G(x))$, predpostavka
2. $\neg G(p)$ predpostavka
3. $\neg T(p)$ M.T. (1, 2)

Sklep je pravilen.

---

b) $\forall x : (U(x) \Rightarrow Z(x)) \models \forall x : \neg Z(x) \Rightarrow \forall x : \neg U(x)$

1. $\forall x : (U(x) \Rightarrow Z(x))$ predpostavka

2.1 $\forall x : \neg Z(x)$ pred. p. s.

2.2 $\forall x : \neg U(x)$ M.T. (1, 2.1)

2. $\forall x : \neg Z(x) \Rightarrow \forall x : \neg U(x)$ PS(2.1, 2.2)

Sklep je pravilen.

c)

$$\forall x \forall y : (Z(x) \land Ž(y) \Rightarrow P(x,y))$$

$$\models \forall x \forall y : (Z(x) \land Ž(y) \Rightarrow \neg P(y,x))$$

$$0.\ \forall x \forall y : (P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x))$$

"Skrita predpostavka": če x prehi y, potem y ne prehiti x.

$$1.\ \forall x \forall y : (Z(x) \land Ž(y) \Rightarrow P(x,y)) \quad \text{predp.}$$

$$2.\ \forall x \forall y : (Z(x) \land Ž(y) \Rightarrow \neg P(y,x)) \quad HS(0,1)$$

Sklep je pravilen ob upoštevanju skrite predpostavke.

d)

$$\exists x \exists y : (P(x) \land Z(y) \land R(x,y))$$

$$\forall x \forall y : (P(x) \land D(y) \Rightarrow \neg R(x,y))$$

$$\models \forall y : (Z(y) \Rightarrow \neg D(y))$$

Protiprimer: domena: $D = \{ a, b \}$

$\neg P(a)$ $P(b)$

$Z(a)$ $Z(b)$

$D(a)$ $\neg D(b)$

$\neg R(b,a)$

$R(b,b)$

Našli smo protiprimer - interpretacijo, v kateri so predpostavke resnične, sklep pa neresničen. Sklepanje je torej nepravilno.

Lahko bi še zapisali, ali velja R(a, a) oziroma R(a, b), a na resničnost zgornjih izjav vrednosti slednjih ne vplivata.