1. naloga: katere lastnosti ima relacija $\perp$?

A je množica ravnin $\mathbb{R}^3$

$r_1 \perp r_2 \iff r_1$ in r_2 ravnini sta pravokotni

1. Ni refleksivna
2. JE SIMETRIČNA
3. NI ANTISIMETRIČNA
4. NI ASIMETRIČNA
5. JE IREFLEKSIVNA
6. Ni TRANZITIVNA
7. NI INTRANZITIVNA
8. NI SOVISNA
9. NI STRIGO SOVISNA
10. NI ENOLIČNA

2. naloga: katere lastnosti ima relacija F na poljih šahovnice, pri čemer sta polji v relaciji F natanko tedaj, ko lahko kraljica (trdnjava, konj) od prvega polja v eni potezi pride v drugega?

$F \subseteq A^2$

A so polja šahovnice

K sim, irefl

1. NE
2. DA
3. NE
4. NE
5. DA
6. NE
7. NE
8. NE
9. NE
10. NE

T sim, irefl

1. NE
2. DA
3. NE
4. NE
5. DA
6. NE
7. NE
8. NE
9. NE
10. NE

KO sim, irefl in tranz.

1. NE
2. DA
3. NE
4. NE
5. DA
6. NE
7. DA
8. NE
9. NE
10. NE

3. naloga: pokaži enakost

a)

$$(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$$

$$x(R*S)^{-1}y \Leftrightarrow y(R*S)x \Leftrightarrow \exists z.(yRz \wedge zSx) \Leftrightarrow$$

$$\exists z.(xS^{-1}z \wedge zR^{-1}y) \Leftrightarrow x(S^{-1} * R^{-1})y$$

b)

$$R * (S \cup T) = (R * S) \cup (R * T)$$

$$x(R*(S \cup T))y \Leftrightarrow \exists z : (xRz \wedge z(S \cup T)y)$$

$$\Leftrightarrow \exists z : (xRz \wedge (zSy \vee zTy))$$

$$\Leftrightarrow \exists z : ((xRz \wedge zSy) \vee (xRz \wedge zTy))$$

$$\Leftrightarrow \exists z : (xRz \wedge zSy) \vee \exists z : (xRz \wedge zTy)$$

$$\Leftrightarrow x(R*S)y \vee x(R*T)y \Leftrightarrow x((R*S) \cup (R*T))y$$

c)

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$x(R \cup S)^{-1} y \Leftrightarrow y(R \cup S)x \Leftrightarrow y\,Rx \vee y\,Sx$$

$$\Leftrightarrow x R^{-1} y \vee x S^{-1} y \Leftrightarrow x(R^{-1} \cup S^{-1})y$$

4. naloga

$R \subseteq \mathbb{N}^2$

$mRn \iff m \cdot n$ je kvadrat naravnega števila

a) Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija!

$mRm \iff m^2$ je kvadrat naravnega št.

Je refleksivna

$mRn \iff nRm$ (ker mn = nm) Je simetrična

$mRn \wedge nRx \Rightarrow mRx$

$m \cdot n \cdot n \cdot x = n^2 (m \cdot x)$ popoln kvadrat

Je tranzitivna

b) Kaj je R[30]? Kaj je R[12]?

$$R[30] = \{30, 120, 270, \dots\}$$

$$12 = 3 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 5 \cdot 2$$

$$R[30] = \{30 \cdot x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

$$R[12] = \{3x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} = R[3]$$

c) Poišči množico A naravnih števil, ki vsebuje natanko en element iz vsakega ekvivalenčnega razreda!

Primer: množica vseh naravnih števil, katerih prafaktorji se pojavijo s potenco največ 1.

5. naloga: naj bosta P in Q simetrični relaciji. Pokaži, da je relacija P*Q simetrična natanko tedaj, ko je P*Q = Q*P.

($\Longrightarrow$) Če je P*Q simetrična, velja $x(P * Q)y \Leftrightarrow y(P * Q)x$

($\Longleftarrow$) Če je P*Q = Q*P, velja $x(P * Q)y \Leftrightarrow x(Q * P)y$

Pokažimo ekvivalenco med desnima stranema zgornjih ekvivalenc.

$$x(P*Q)y \Leftrightarrow \exists z: (xPz \wedge zQy)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(P*Q)x \Leftrightarrow \exists w: (yPw \wedge wQx)$$

$$x(Q*P)y \Leftrightarrow \exists w: (wPy \wedge xQw)$$

6. naloga: naj bosta P in Q ekvivalenčni relaciji. Kdaj je tudi P*Q ekvivalenčna relacija?

P, Q ekvivalenčni relaciji

$P * Q$ ekvivalenčna?

1. $x(P*Q)x \iff \exists z : (xPz \wedge zQx)$

$z = x$ je refleksivna

2. Po prejšnji nalogi: P, Q simetrični

$P*Q = Q*P \iff P*Q$ je simetrično

Potreben pogoj: P*Q = Q*P
Pogoj je netrivialen: naj bo A/P = {{a, b}, {c}} in A/Q = {{a}, {b, c}} (P in Q sta ekvivalenčni relaciji).
Potem velja a (P*Q) c, ne velja pa c (P*Q) a. Relacija P*Q tako ni simetrična in zato ni ekvivalenčna.

Da bi bila relacija P*Q simetrična, predpostavimo P*Q = Q*P.

$$x(P*Q)y \wedge y(P*Q)z$$

$$\Leftrightarrow \exists s:(xPs \wedge sQy) \wedge \exists t:(yPt \wedge tQz)$$

$$\Leftrightarrow \exists s \exists t:(xPs \wedge sQy \wedge yPt \wedge tQz)$$

$$\Leftrightarrow \exists s \exists t:(xPs \wedge s(Q*P)t \wedge tQz)$$

$$\Leftrightarrow \exists s \exists t:(xPs \wedge s(P*Q)t \wedge tQz)$$

$$\Leftrightarrow \exists s \exists t:(xPs \wedge \exists w:(sPw \wedge wQt) \wedge tQz)$$

$$\Leftrightarrow \exists s \exists t \exists w:(xPs \wedge sPw \wedge wQt \wedge tQz)$$

$$\Rightarrow \exists w:(xPw \wedge wQz) \Leftrightarrow x(P*Q)z$$

(zaradi tranzitivnosti P in Q)

Če sta P in Q ekvivalenčni relaciji, je P*Q = Q*P zadosten pogoj, da je tudi relacija P*Q ekvivalenčna.
Ker je P*Q = Q*P potreben pogoj, da je relacija P*Q simetrična, je tudi potreben pogoj za ekvivalenčnost.
Produkt P*Q ekvivalenčnih relacij P in Q je torej ekvivalenčen natanko tedaj, ko velja P*Q = Q*P.