Barvanja grafov

21. marec 2008

Graf je k**-obarvljiv**, če obstaja preslikava $c : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ tako, da je $c(u) \neq c(v)$ za poljubni sosednji točki u in v grafa G.

Tako preslikavo imenujemo **barvanje** oziroma k**-barvanje** grafa.

Po domače: obarvaj vsako točko grafa z eno izmed k barv tako, da sta poljubni sosednji točki različno pobarvani.

Zgledi:

Trditev 1 *Velja:*

- *1-obarvljivi grafi so natanko grafi brez povezav;*
- *2-obarvljivi grafi so natanko dvodelni grafi.*

Dokaz. Trditvi sta očitni. $\square$

Kromatično število $\chi(G)$ grafa G je najmanjše število k, za katero je G k-obarvljiv.

Velja:

$$\chi(K_n) = n \quad \text{in} \quad \chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{za } n \text{ sodo število;} \\ 3, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Znani niso nobeni potrebni in zadostni pogoji za to, da je $\chi \leq k$, tj. določitev χ je NP-težak problem. Zanimajo nas zgornje oz. spodnje meje χ.

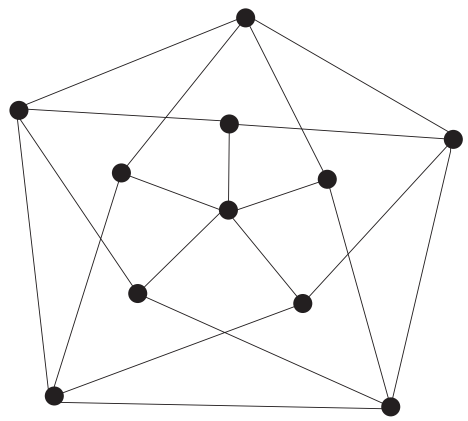
Trditev 2 *Pri barvanju grafov veljajo naslednje lastnosti:*

1. $\chi(G) \leq |V(G)|$ *in enakost velja natanko takrat, ko je G poln graf;*
2. *Če je H podgraf v G, potem je* $\chi(H) \leq \chi(G)$*;*
3. *Če G vsebuje kliko na k točkah, potem je* $\chi(G) \geq k$.

Dokaz. Trditve so manj ali več očitne.

$\square$

Naloga 1 *Pokaži, da za Grötzchev graf G velja* $\chi(G) = 4$.



Rešitev:

Zveza med Δ in χ

V tem razdelku bomo uporabili okrajšavo $\Delta = \Delta(G)$.

Trditev 3 *Za vsak graf G velja $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

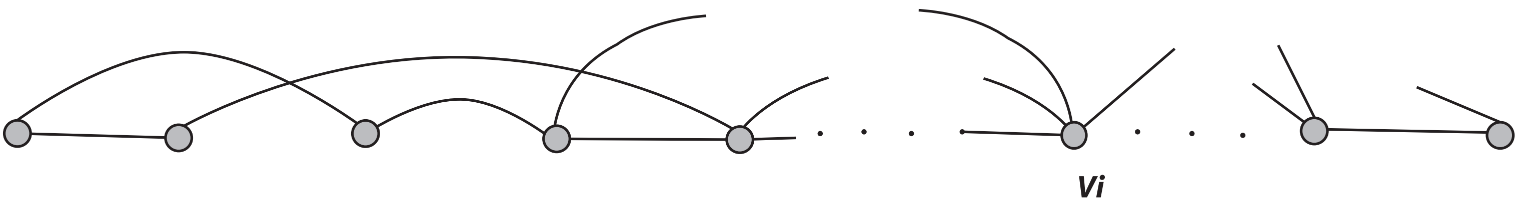
Dokaz. Indukcija po številu točk n grafa G. Očitno velja za $n = 1$. Naj bo $n \geq 2$ in naj bo v poljubna točka v G. Ker je $\Delta(G - v) \leq \Delta$, obstaja barvanje c grafa $G - v$ z $\Delta + 1$ barvami. Točka v ima največ Δ sosedov in vse te točke so že pobarvane.

Ker imamo $\Delta+1$ barv, je vsaj ena neuporabljena oz. prosta pri sosedih točke v. Uporabimo to barvo na v in tako razširimo barvanje c na cel graf G.

Alternativen dokaz: Točke grafa G linearno razvrstimo

$$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_i \quad \cdots \quad v_{n-1} \quad v_n$$

ter v tem vrstnem redu barvamo eno za drugo tako, da vsaki točki priredimo (najmanjšo) prosto barvo. Algoritem pobarva vse točke, ker imamo pri barvanju poljubne točke vsaj eno prosto barvo.



Brooksov izrek

Naloga 2 *Poišči grafe G, za katere velja enačaj $\chi(G) = \Delta + 1$.*

Izrek 4 (Brooks) *Naj bo G graf z maksimalno stopnjo Δ. Če G ni lih cikel niti poln graf na $\Delta + 1$ točkah, potem je $\chi(G) \leq \Delta$.*

Dokaz z uporabo Kempejevih verig $H(a, b)$: Predpostavimo, da je izrek napačen in naj bo G minimalni protiprimer. Ni se težko prepričati, da mora biti $\Delta \geq 3$ ter da je vsaka točka grafa G stopnje Δ. Naj bo n število točk grafa G ter v poljubna točka grafa G. Po minimalnosti obstaja Δ-barvanje grafa $G - v$. V tem barvanju so vse sosede točke v različno obarvane, sicer barvanje lahko razširimo na G. Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_\Delta$ sosede točke v ter naj bodo ustrezno obarvane z barvami $1, 2, \ldots, \Delta$. Označimo s $H(i, j)$ podgraf grafa G, induciranega s točkami, ki imajo barvo i ali barvo j. Komponento grafa $H(i, j)$, ki vsebuje točko u, označimo s $H_u(i, j)$.

Trditev 1. *Poljubni dve sosedi v_i in v_j točke v sta v isti komponenti grafa $H(i, j)$.*

Če to ni res, potem v komponenti, v kateri je v_i, vse točke z barvo i prebarvamo z barvo j in obratno. Nazadnje v obarvamo z barvo i in dobimo iskano barvanje grafa G.

Trditev 2. *Vsaka točka iz $H_{v_i}(i, j)$, ki je različna od v_i in v_j, je stopnje 2.*

Iz točke v_i se začnimo sprehajati po grafu $H_{v_i}(i, j)$. Naj bo u prva točka, ki jo srečamo, stopnje ≥ 3 ter različna od v_i in v_j. Zagotovo obstaja barva, različna od i in j, s katero ni obarvana nobena od sosed točke u. S to barvo obarvamo točko u in dobimo protislovje iz trditve 1.

Trditev 3. *Za poti $H_{v_j}(i, j)$ in $H_{v_j}(k, j)$ je v_j edina skupna točka.*
Recimo, da je u druga skupna točka teh poti. Tedaj ima točka u štiri sosede, ki so pobarvane z barvami i in k. Zaradi tega obstaja prosta barva, s katero pobarvamo točko u ter dobimo protislovje iz trditve 1.

Ker G ni polni graf, na $\Delta + 1$ točkah obstajata taki v_i in v_j, ki nista sosedi. Naj bo u točka grafa G, ki je obarvana z barvo j ter je sosednja z v_i. Ta točka je različna od v_j. Naj bo $k \neq i$ in $k \neq j$. V $H_{v_i}(i, k)$ točkam zamenjamo barve. V novem barvanju je točka u skupna za poti $H_{v_j}(i, j)$ in $H_{v_j}(k, j)$. To pa nasprotuje trditvi 3 in s tem je dokaz končan.

$\square$

Nekaj zgledov uporabe barvanja grafov

1. V skladišču kemikalij so shranjene kemikalije $C_1, \ldots, C_n$. Zaradi varnosti določene spojine ne smejo biti v istem prostoru. Najmanj koliko ločenih prostorov rabimo v skladišču, da bo shranjevanje varno?

2. Turistična agencija organizira izlete za n skupin. Za vsako skupino vemo, kdaj se njen izlet začne in kdaj se konča. Zanima nas najmanj koliko vodičev potrebuje agencija.

3. Pri letalski družbi poznamo vse polete ter za vsak polet poznamo natančen prihod in odhod letala. Zanima nas minimalno število letal, ki jih agencija potrebuje?

k-degeneriranost

Naj bo G graf in k naravno število. Če je minimalna stopnja vsakega podgrafa H grafa G največ k, potem rečemo, da je G k**-degeneriran**.

Degeneriranost $d(G)$ grafa G je najmanjše število k, za katero je G k-degeneriran t.j.

$$k = \max_{H \subseteq G} \delta(H)$$

Zgledi:

Trditev 5 *Če je G k-degeneriran, potem lahko točke grafa razvrstimo*

$$v_1 \qquad v_2 \qquad v_3 \qquad \cdots \qquad v_i \qquad \cdots \qquad v_{n-1} \qquad v_n$$

tako, da ima vsaka točka največ k sosedov z manjšim indeksom.

Dokaz. Naj bo G k-degeneriran. G ima točko stopnje največ k. Naj bo to točka v_n (v razvrstitvi jo zapišemo zadnjo). Obravnavamo graf $G - v_n$. Ta graf je prav tako k-degeneriran. Naj bo točka v_{n-1} stopnje največ k (ta točka bo predzadnja v razvrstitvi). Graf $G - v_n - v_{n-1}$ je tudi k-degeneriran in tako nadaljujemo po istem postopku ter razvrstimo vse točke.

□

Trditev 6 *Vsak k-degeneriran graf je $(k+1)$-obarvljiv.*

Dokaz. Po postopku iz prejšnje trditve/dokaza lahko točke razvrstimo tako, da ima vsaka točka največ k povezav do točk z manjšim indeksom. Če barvamo po vrsti, pri posamezni točki v najslabšem primeru dobimo največ k različno obarvanih sosedov, ki so že pobarvani. V tem primeru uporabimo prosto barvo.

□

Posledica 7 *Vsak ravninski graf je 5-degeneriran in zato 6-obarvljiv.*

Dokaz. Naj bo G ravninski graf. Zato ima točko stopnje največ 5 (to smo že pokazali). Vsak njegov podgraf je prav tako ravninski, zato ima tudi stopnjo največ 5. G je 5-degeneriran. Iz prejšne trditve sledi, da je 6-obarvljiv. □

Barvanje zemljevidov

O zgodovini barvanj grafov ne moremo govoriti, ne da bi omenili problem štirih barv. Začelo se je takole. Leta 1852 je Francis Guthrie opazil, da se regionalni zemljevid Anglije da obarvati s štirimi barvami tako, da sta katerikoli dve sosednji regiji različno obarvani. (Regiji sta sosednji le, če imata skupni rob.) Ugotovil je, da so v splošnem potrebne vsaj štiri barve ter je postavil domnevo, da to število barv tudi zadostuje.

Zgledi:

Problem štirih barv (Francis Guthrie). *Regije poljubnega zemljevida se lahko obarvajo s štirimi barvami tako, da sta katerikoli dve sosednji regiji različno obarvani.*

Francis Guthrie je povedal zgornjo domnevo svojemu bratu Fredericku. Frederick pa je predstavil ta problem svojemu profesorju DeMorganu. Le-ta je pisal o njem svojemu kolegu Hamiltonu. To pismo je prvi (znani) dokument, v katerem se omenja problem štirih barv.

Problem je bil v celoti pozabljen do leta 1878, ko ga je Artur Cayley omenil članom Londonskega društva matematikov. Leta 1879 je Tait objavil rešitev problema. Tudi Kempe je objavil rešitev. Njuna dokaza pa nista bila popolna. Leta 1890, torej deset let kasneje, je Heawood ugotovil napako v Kempejevem dokazu ter prvi dokazal, da za barvanje zadostuje 5 barv.

Izrek o petih barvah (Heawood). *Vsak ravninski graf je 5-obarvljiv.*

Leta 1969 je Heesch predstavil metodo prenašanja naboja, leta 1977 pa je s to metodo Appelu in Hakenu uspelo rešiti problem. Vendar je dokaz, ki sta ga izpeljala Appel in Haken, zelo dolg ter zahteva računalniško obdelavo podatkov. Bolj enostaven dokaz so našli Robertson, Sanders, Seymour in Thomas, vendar tudi njihov dokaz uporablja računalniško obdelavo podatkov. Torej vsak mora sam presoditi, ali je prav zapisati problem štirih barv kot izrek.

Izrek o štirih barvah (Appel in Haken). *Vsak ravninski graf je 4-obarvljiv.*

Grötzschev izrek pravi, da za ravninske grafe brez trikotnikov lahko potrebno število barv zmanjšamo za 1.

Izrek 8 (Grötzsch) *Vsak ravninski graf brez trikotnikov je 3-obarvljiv.*

Kromatični polinom

Naj bo G enostaven graf in naj bo $P(G,k)$ funkcija števila barvanj grafa G s k-barvami. Potem to funkcijo imenujemo **kromatični polinom** grafa G.

Opomba: $\chi(G)$ je najmanjše pozitivno število k, za katerega velja $P(G,k) > 0$.

Zgledi: P_2, P_3, P_n, K_3, K_n, $\bar{K}_n$

Naloga 3 *Izračunaj kromatični polinom za graf* C_4.

Naloga 4 *Naj bo T drevo na n točkah. Izračunaj $P(T,k)$.*

Trditev 9 *Naj bo G graf in $e = xy$ povezava v G. Potem*

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k).$$

Dokaz. Radi bi pokazali, da je

$$P(G-e,k) = P(G,k) + P(G/e,k).$$

Število k-barvanj grafa $G-e$ pri katerem sta x in y različno obarvana je $P(G,k)$. Število k-barvanj grafa $G-e$, pri katerem sta x in y enako obarvana, je $P(G/e,k)$. Od tod pa zveza takoj sledi.

□

Trditev 10 *Funkcija $P(G,k)$ je polinom.*

Dokaz.

Naloga 5 *Izračunaj kromatični polinom za graf C_5.*

Barvanja povezav grafa

Podobno kot pri barvanju točk barvamo povezave tako, da bosta poljubni dve sosednji povezavi različno obarvani.

Najmanjše število potrebnih barv, da bi obarvali povezave grafa G, imenujemo **kromatični indeks** grafa G in ga označimo s $\chi'(G)$.

Očitno je, da je $\Delta(G)$ potrebno število barv za barvanje povezav grafa G, t.j. $\Delta(G) \leq \chi'(G)$

Zgledi: P_n, C_n, K_4, K_5, Q_3

Problem 1 *Izračunaj* $\chi'(Q_d)$.

Izrek 11 (König) *Naj bo G dvodelen multigraf. Potem je*

$$\chi'(G) = \Delta(G). \tag{1}$$

Barvanje povezav določenega grafa G lahko obravnavamo kot barvanje točk povezavnega grafa $L(G)$.

Spomnimo se $V(L(G)) = E(G)$, dve točki $e, f \in V(L(G))$ pa sta sosednji natanko takrat, ko sta povezavi e in f incidenčni v grafu G.

Trditev 12 *Velja $\chi'(G) = \chi(L(G))$.*

Osupljiv rezultat Vizinga pa pove, da zadostno število barv ni bistveno večje.

Izrek 13 (Vizing) *Naj bo G enostaven graf z maksimalno stopnjo Δ. Potem je*

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1. \tag{2}$$

Vizingov izrek poraja zelo zanimiv problem. Naj bo **razred I** sestavljen iz grafov, za katere velja, da je $\Delta = \chi'$. Grafi, za katere to ne velja, naj tvorijo **razred II**. Za dani graf se lahko vprašamo, v katerem razredu je.

Problem 2 *Kateremu razredu pripada P_{10}?*

Rešitev: