Usmerjeni grafi - Digrafi

March 3, 2008

Usmerjena povezava: $a \to b$

Grafu D rečemo **usmerjeni graf** oz. **digraf**, če ima vse povezave usmerjene.

$V(D)$ je **množica točk** digrafa D.

$A(D)$ je **množica usmerjenih povezav** digrafa D.

Zgled:

Usmerjena pot $\overrightarrow{P_n}$

Usmerjeni cikel $\overrightarrow{C_n}$

Temeljni graf

Iz digrafa D lahko dobimo **temeljni graf** G tako, da iz D odstranimo vse usmeritve oz. da usmerjene povezave nadomestimo z neusmerjenimi.

Zgled:

D je **enostaven**, če nima vzporednih povezav in zank.

Trditev 1 *Če je temeljni graf digrafa enostaven, je tudi digraf enostaven.*

Dokaz. Naj bo D digraf, G pa njegov temeljni graf. Ker v G ni vzporednih povezav in zank, jih tudi v D ni. $\square$

Opomba: Obratno ne velja. Digraf D je lahko enostaven, temeljni graf G pa ne.

Vhodna in izhodna stopnja

Naj bo $x \in V(D)$.

Izhodna stopnja $d^+(x)$ je število povezav z začetkom v x.

Vhodna stopnja $d^-(x)$ je število povezav s koncem v x.

Zgled:

Lema 2 (Lema o rokovanju) *V digrafu D velja*

$$\sum_{x \in V(D)} d^+(x) = \sum_{x \in V(D)} d^-(x) = |A(D)|.$$

Dokaz. Najprej preštejemo vse povezave ne glede na njihovo usmerjenost. Vsako povezavo štejemo le enkrat in tako dobimo moč množice $A(D)$. Enako dobimo, če štejemo samo vhodne povezave. Tudi če bi prešteli konce vseh usmerjenih povezave, bi dobili enako. To pa je ravno vsota vseh vhodnih stopenj.

$\square$

Matrike digrafov

D digraf

$V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$A(D) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

Matrike sosednosti $A(D)$

$$A(D) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i \longrightarrow v_j \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Incidenčna matrika $B(D)$

$$B(D) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če gre } e_j \text{ iz } v_i, \\ -1, & \text{če gre } e_j \text{ v } v_i, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Povezanost digrafov

Digraf D je **povezan**, če je njegov temeljni graf povezan. V nasprotnem je **nepovezan**.

Digraf je **krepko povezan**, če v njem obstaja usmerjena pot med poljubnim urejenim parom točk.

Zgled:

Naloga 1 *Temeljni graf krepko povezanega digrafa je brez mostov.*

Rešitev:

Izrek 3 *Naj bo G neusmerjen graf. Povezave grafa G je možno usmeriti, da dobimo krepko povezan digraf natanko takrat, ko je G brez mostov.*

Sprehodi v digrafih

Naslednje pojme definiramo enako kot pri neusmerejenih grafih

- usmerjen sprehod
- usmerjen obhod
- usmerjen cikel
- usmerjena pot

z edino razliko, da se po povezavah lahko premikamo le tako kot so usmerjene.

Lema +. *Če je izhodna stopnja vsake točke digrafa D strogo večja od 0, potem D vsebuje usmerjen cikel.*

Dokaz. Izberimo si poljubno točko v_1 digrafa D. Ker je izhodna stopnja vsake točke digrafa strogo večja od nič, mora obstajati usmerjena povezava z začetkom v točki v_1 in koncem v neki točki v_2. Kar je veljalo za točko v_1, velja tudi za točko v_2 in za vse naslednje točke. Tako dobimo sprehod $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, \ldots$ v digrafu D. Vseh točk je končno, iz česar sklepamo, da se morajo točke našega sprehoda začeti ponavljati, recimo $v_i = v_k$. Potem je $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}$ usmerjen cikel.

□

Lema −. *Če je vhodna stopnja vsake točke digrafa D strogo večja od 0, potem D vsebuje usmerjen cikel.*

Naloga 2 *Naj bodo vse točke grafa G sode. Usmeri vse povezave grafa G tako, da v usmerjenem grafu D, ki ga dobiš, velja*

$$d^+(v) = d^-(v),$$

za vsako točko $v \in V(D)$.

Eulerjevi digrafi

Usmerjen sprehod/obhod je **Eulerjev**, če vsebuje vse usmerjene povezave digrafa.

Povezan digraf je **Eulerjev**, če ima usmerjen Eulerjev obhod.

Zgled:

Naslednja izreka sta zelo podobna "ekvivalentnim" izrekom za neusmerjene grafe.

Izrek 4 *Naj bo D povezan digraf. Potem je D Eulerjev natanko takrat, ko sta vhodna in izhodna stopnja vsake točke enaki.*

Izrek 5 *D ima Eulerjev sprehod natanko takrat, ko velja*

- *D je Eulerjev; ali*
- *Obstajata dve točki a in b v D tako, da je*

  $$d^+(a) = d^-(a) + 1 \text{ in } d^-(b) = d^+(b) + 1,$$

  ter za vsako drugo točko $v \in V(D)$ velja $d^+(v) = d^-(v)$.

Hamiltonovi digrafi

Povezan digraf D je **Hamiltonov**, če ima usmerjen cikel, ki vsebuje vse točke digrafa. Tak cikel imenujemo **Hamiltonov cikel**.

Hamiltonova pot v digrafu je usmerjena pot, ki vsebuje vse točke tega digrafa.

Zgled:

Izrek 6 (Diracov izrek) *Naj bo D enostaven digraf z $n \geq 3$ točkami. Če za vsako točko v velja*

$$d^+(v) \geq \frac{n}{2} \quad \text{in} \quad d^-(v) \geq \frac{n}{2},$$

potem je D Hamiltonov.

Izrek 7 (Orejev izrek) *Naj bo D enostaven digraf z $n \geq 3$ točkami. Če za vsak par točk x in y, tako da ni nobene povezave iz x v y, med katerima ni povezave*

$$d^+(x) + d^-(y) \geq n,$$

potem je D Hamiltonov.