Drevesa

February 29, 2008

Grafu, ki ne vsebuje nobenega cikla, pravimo **gozd**.

Če je gozd tudi povezan, mu pravimo **drevo**.

Trditev 1 *Naj bo T drevo z n točkami in m povezavami. Velja:*

1. *Če $T \neq K_1$, potem ima T vsaj dva lista;*
2. $m = n - 1$;
3. *Za poljubna $u, v \in V(T)$ obstaja natanko ena pot med u in v;*
4. *Če drevesu T dodamo novo povezavo, potem dobljeni graf vsebuje natanko en cikel;*
5. *T je dvodelni graf.*

Trditev 2 *Vsako drevo T ima vsaj $\Delta(T)$ listov.*

Povezava e v povezanem grafu G je **most**, če $G - e$ razpade na dva dela.

Trditev 3 *V drevesu je vsaka povezava most.*

Naloga 1 *Naj bo T drevo na 14 točkah, v katerem so samo točke stopenj 1 in 4. Koliko točk stopnje 4 ima drevo T?*

Rešitev:

Izrek 4 *Za graf G so ekvivalentne naslednje trditve:*

(a) *G je drevo.*

(b) *G je povezan graf, za katerega velja $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

(c) *G je graf brez ciklov, za katerega velja $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

(d) *G je povezan in vsaka povezava grafa G je most.*

(e) *Za vsak par točk $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja natanko ena pot med u in v.*

(f) *G ne vsebuje cikla, če pa mu dodamo katerokoli povezavo, dobimo cikel.*

Vpeta drevesa

Naj bo G poljuben multigraf. **Vpeto drevo** v G je vsak vpet podgraf, ki je drevo.

Trditev 5 *Vsak povezan graf vsebuje vpeto drevo.*

Število vpetih dreves multigrafa G označimo s $\tau(G)$.

Velja, če je G drevo, potem $\tau(G) = 1$.

Naloga 2 *Izračunaj* $\tau(C_n)$.

Naloga 3 *Izračunaj* $\tau(K_1)$, $\tau(K_2)$, $\tau(K_3)$, $\tau(K_4)$.

Računanje $\tau(G)$

Zanke ne vplivajo na število vpetih dreves, zato jih pred štetjem vedno odstranimo.

Trditev 6 *Število $\tau(G)$ lahko izračunamo s pomočjo* ***rekurzivne formule****:*

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)\,,$$

kjer je e poljubna povezava multigrafa G, ki ni zanka.

Prvi člen $\tau(G - e)$ v formuli ustreza vpetim drevesom, ki ne vsebujejo povezave e, drugi člen $\tau(G/e)$ pa tistim, ki povezavo e vsebujejo.

Računanje skrajšamo, če rekurzivno formulo uporabimo tudi na skupini vzporednih povezav.

Trditev 7 *Če je povezava e ena od k vzporednih povezav, potem velja*

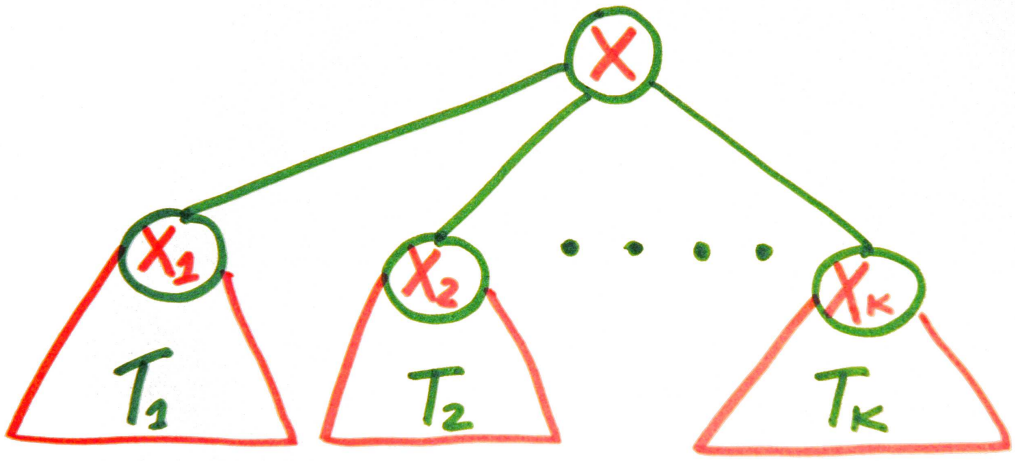
$$\tau(G) = \tau(G - F) + k \cdot \tau(G/e),$$

kjer je F množica vseh z e vzporednih povezav.

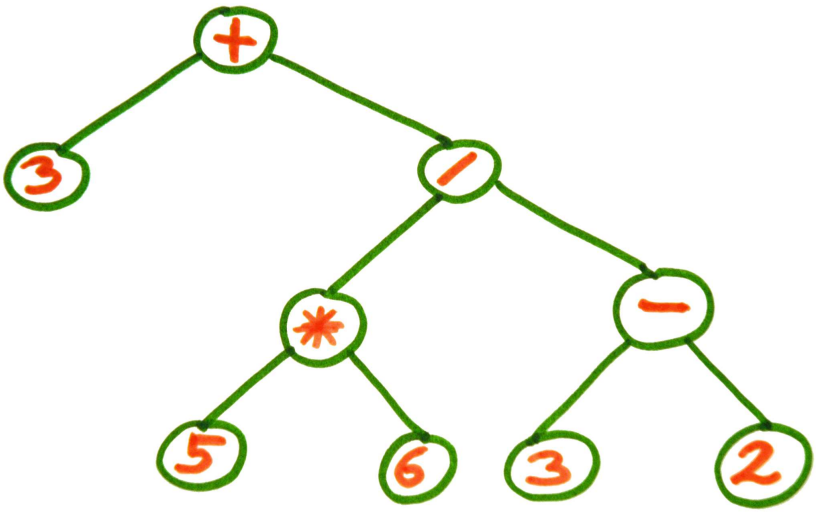
Izrek 8 (Cayley) $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

Drevesa s korenom

Drevo T s korenom x je drevo, pri katerem je vozlišče x posebej odlikovano. Pri tem pa rekurzivo velja, da je vsaka komponenta T_i iz $T - x$ drevo s korenom x_i, kjer je x_i tisto vozlišče iz T_i, ki je sosedno z x.



Zgled: Drevo aritmetičnega izraza $3 + (5 * 6)/(3 - 2)$



Pri drevesu s korenom poznamo:

- relacijo oče-sin oz. relacijo prednik-potomec;
- nivoje ter globino.

Omenimo naslednja tipa dreves:

- **dvojiška drevesa:** vsako vozlišče ima največ dva sinova. Dvojiško drevo je **popolno**, če velja
  - vsako vozlišče, ki ni list, ima natanko dva sinova;
  - vsi listi so na enaki razdalji od korena.
- **AVL drevesa:** dvojiško drevo, kjer pri vsakem vozlišču velja, da se višini levega in desnega poddrevesa razlikujeta največ za 1.

Problem 1 *V popolnem dvojiškem drevesu višine k izračunaj:*

- *število vozlišč oz. listov;*
- *povprečni nivo;*
- *povprečno razdaljo od korena.*

Problem 2 *Katera je minimalna višina dvojiškega drevesa, ki vsebuje n elementov?*