Eulerjevi grafi

February 29, 2008

Sprehod v grafu je **Eulerjev**, če vsebuje vsako povezavo grafa natanko enkrat.

Eulerjev obhod je sklenjen Eulerjev sprehod.

Graf je **Eulerjev**, če vsebuje Eulerjev obhod.

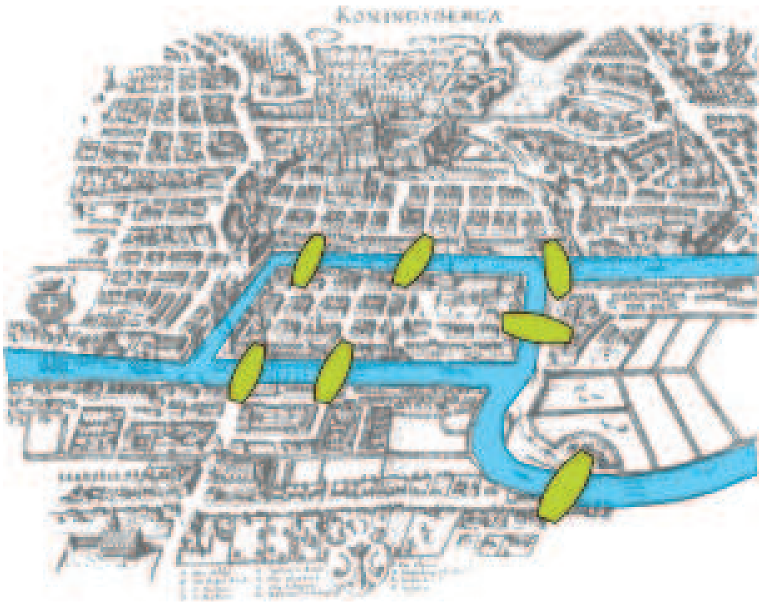
Potrebna pogoja za obstoj Eulerjevega obhoda:

(P1) **Graf je povezan**.

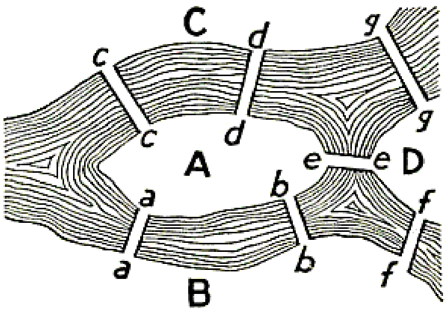
(P2) **Vse točke so sode stopnje**. Saj če med obhodom pridemo v neko točko, moramo iz te točke tudi oditi. Isto velja tudi za začetno točko, ki je enaka končni.

Problem Königsberških mostov

Problem 1 *Ali obstaja obhod mesta, ki bi prečkal vsak most natanko enkrat in se vrnil v izhodišče?*



Euler je leta 1736 dal negativen odgovor.



The Königsberg Bridges.

Izrek 1 *Naj bo G povezan graf. Graf G je Eulerjev natanko takrat, ko so vse točke sode stopnje.*

Dokaz. Dokazovali bomo s pomočjo matematične indukcije po številu povezav m. Pri $m = 0$ je G enak K_1, ta je Eulerjev. Iz G odstranimo cikel C in dobimo nov graf H, kateri ima spet vse točke sode stopnje. Po indukcijski predpostavki je vsaka njegova komponenta Eulerjev graf. Poiščimo zdaj Eulerjev obhod v G. Začnemo v katerikoli točki v cikla C in se sprehajamo po njem, dokler ne pridemo do prve komponente grafa H. Potem opravimo Eulerjev obhod te komponente in se vrnemo na cikel C. Tako nadaljujemo vzdolž C-ja in vsakič, ko pridemo do komponente grafa H, naredimo Eulerjev obhod po njej.

Izrek 2 *Naj bo G povezan graf. G ima Eulerjev sprehod natanko takrat, ko ima največ dve točki lihe stopnje.*

Dokaz.

Fleuryjev algoritem

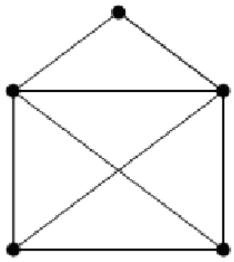
Fleuryjev algoritem najde Eulerjev obhod v Eulerjevem grafu. Algoritem je naslednji:

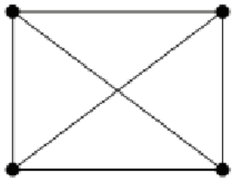
1. Izberi si začetno točko.
2. Prečkaj poljubno povezavo, le most izberi samo, kadar ni na voljo nobene druge povezave.
3. Prehojeno povezavo odstrani. Prav tako odstrani vse točke, ki so postale izolirane.
4. Končaj, ko ni nobene povezave več.

Število potez - razvedrilne naloge iz osnovne šole

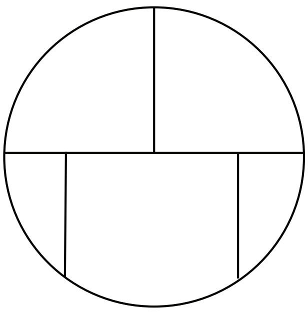
Obstoj Eulerjevega sprehoda implicira, da graf lahko narišemo z eno **potezo**.

Nariši v eni potezi vsakega izmed grafov:





Nariši spodnji diagram s čim manj potezami:



Izrek 3 *Naj bo G povezan graf z l lihimi točkami. Število potez, da narišemo G, je $l/2$ za $l > 0$ ter 1 za $l = 0$.*

Dokaz. Če graf nima lihih točk, je Eulerjev, zato ga lahko narišemo z eno potezo.

Naj bo $l > 0$. Očitno mora biti vsaka liha točka krajišče ene poteze. Torej število potez ne more biti manjše od $l/2$.

Naj bodo zdaj $v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k}$ lihe točke grafa G. Grafu G dodamo povezave $v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2k-1}v_{2k}$ in tako dobimo nov graf H. Graf H ima vse točke sode stopnje, zato je Eulerjev. Poiščemo Eulerjev obhod v H. Potem odstranimo dodane povezave in obhod grafa H razpade na k poti (oz. potez) grafa G.

Kitajski problem poštarja

Leta 1962 je Meigu Guan podal naslednji problem:

Problem KPP - osnovni: Poišči najkrajši obhod v grafu, ki prehodi vsako povezavo vsaj enkrat.

Motivacija: Poštar želi razdeliti pošto vzdolž ulic enega naselja in se nato vrniti nazaj na pošto. Katero pot naj izbere, da bo najkrajša?

Prevedba na grafih:

- točke grafa so križišča mesta;
- povezave grafa so ulice naselja.

Zgled:

Trditev 4 *Poštar lahko obišče vsako povezavo največ dvakrat.*

Trditev 5 *Naj bo* $E(G) = E_1 \cup E_2$, *kjer je* E_i *množica povezav, ki jih poštar prehodi i-krat. Potem je* $G - E_2$ *največji vpet sod (vsaka točka je sode stopnje) podgraf v* G.

Uteženi kitajski problem poštarja

Naj bo $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$

$w(e)$ je **utež** povezave $e \in E(G)$

Paru (G, w) rečemo **uteženi graf**.

Zgled:

Problem KPP - uteženi: Poišči obhod v grafu z najmanjšo skupno težo, ki prehodi vsako povezavo vsaj enkrat.