Hamiltonovi grafi

March 4, 2008

Vpeti poti v grafu G pravimo **Hamiltonova pot**.

Vpetemu ciklu v grafu G pravimo **Hamiltonov cikel**.

Graf je **Hamiltonov**, če ima Hamiltonov cikel.

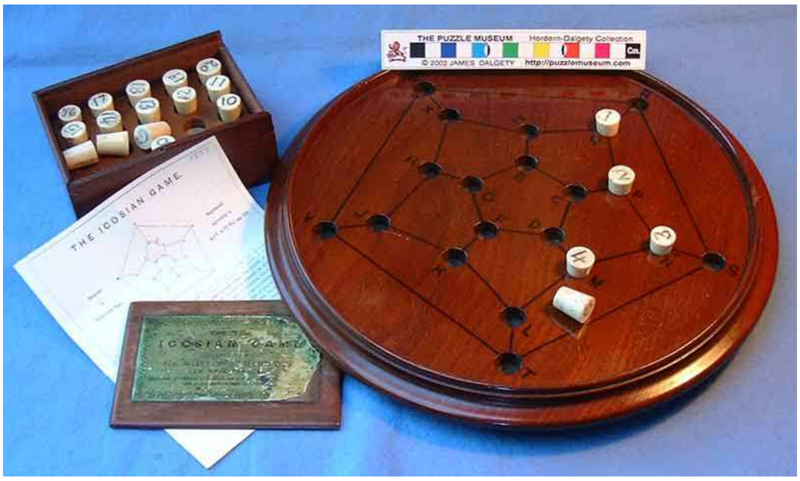
Zgled:

Opomba. Hamiltonova naloga je po svoji formulaciji nekoliko podobna Eulerjevi, a je po svoji zahtevnosti bistveno težja.

Za poljuben graf lahko hitro ugotovimo ali je Eulerjev ali ne. Za ugotavljanje hamiltonosti ni znan noben "preprost" postopek, ki bi bil uporaben za vse grafe.

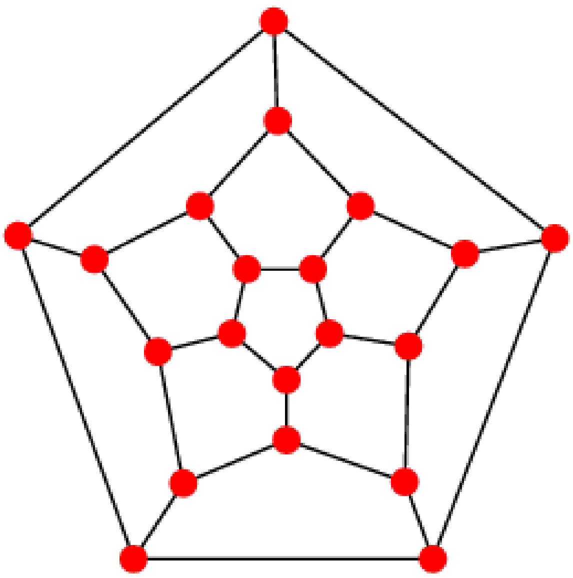
Zgodovina problema

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) - vodilni matematik svojega časa si je izmislil igro: **Potovanje okoli sveta**. Igro je prodal veletrgovcu z igrami za 25 funtov. Igra ni bila komercialno uspešna in kupčija je bila slaba za trgovca.



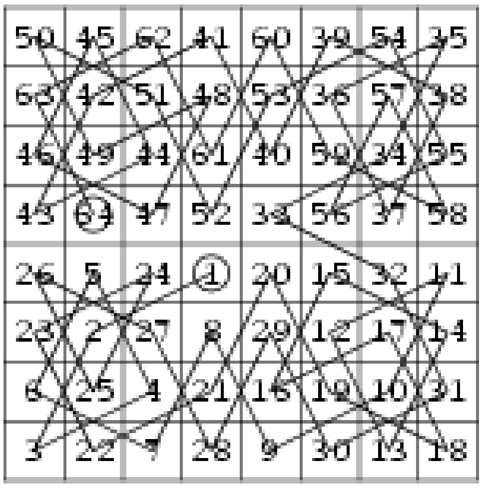
Bistvo igre je poiskati Hamiltonov cikel na dodekaedru, katerega oglišča so označena z začetnimi črkami velemest: Bruselj, Delhi, Zanzibar,... Pri tem je prvih pet črk že izbranih.

Sir Hamilton je pokazal, da vedno obstaja tak cikel, ne glede na izbiro prvih petih zaporednih točk. Problem je rešil s pomočjo ikozaedrskega računa.



Požrešni šahovski konjiček - zgodnejši problem:

Ali lahko skakač obišče vsako polje šahovnice $m \times n$ z zaporedjem skokov in po možnosti zaključi sprehod na začetnem polju?



Problem je ravno iskanje Hamiltonovega cikla. Polja so točke, neko polje pa je povezano z drugim, če lahko skakač iz prvega polja skoči na drugega (črka L).

Zgled:

Potrebni pogoji

Izrek 1 (Osnovni potrebni pogoj) *Če iz grafa G odstranimo k točk in pri tem graf razpade na več kot k komponent, tedaj graf G ni Hamiltonov. Če je komponent več kot $k+1$, potem v grafu G ni niti Hamiltonove poti.*

Dokaz. Recimo, da v grafu G obstaja Hamiltonov cikel oz. pot. Če iz grafa odstranimo k točk, cikel razpade na največ k delov (pomagajmo si s skico), pot pa na največ $k+1$ delov. Vsak od teh delov leži v eni komponenti, na katere razpade graf, in vsaka komponenta vsebuje vsaj en del. Torej graf ne more razpasti na več kot k oz. $k+1$ delov.

□

Zgled:

Posledica 2 *Naj bo G dvodelen graf z razbitjem $V(G) = X \cup Y$. Če je $|X| \neq |Y|$, potem G nima Hamiltonovega cikla. Če velja še $||X| - |Y|| > 1$, potem G ne vsebuje niti Hamiltonove poti.*

Dokaz. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $|Y| > |X|$. Graf $G - X$ ima potem $|Y|$ komponent in po prejšnjem izreku G ni Hamiltonov. Iz $|Y| \geq |X| + 2$ sledi, da je za graf $G - X$ število komponent $|X| + 2$. Torej graf nima Hamiltonove poti.

□

Zgled:

Zadostni pogoji

Če je neki graf Hamiltonov in mu dodamo še nekaj povezav, potem dobimo spet Hamiltonov graf (Hamiltonov cikel je kar isti kot prej). Torej je za graf z veliko povezavami bolj verjetno, da je Hamiltonov, kot za graf z malo povezavami. Za grafe z "veliko povezavami" poznamo tudi zadostne pogoje za Hamiltonost.

Trditev 3 *Naj bosta u in v taki nesosednji točki grafa G, da je* $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$. *Potem je graf $G + uv$ Hamiltonov natanko tedaj, ko je G Hamiltonov.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Očitno. Hamiltonov cikel v G je tudi Hamiltonov cikel v $G + uv$.
($\Leftarrow$) Recimo, da je $G+uv$ Hamiltonov. Naj bo C Hamiltonov cikel v $G+uv$. Če povezava uv ni na ciklu, potem je to cikel tudi v G. Zato predpostavimo, da je povezava uv na ciklu C. Zaradi tega je $P = C - uv$ Hamiltonova pot v G. Trdimo, da obstajata zaporedni točki x, y na poti od u do v tako, da je $u \sim y$ in $x \sim v$. Če obstajata taka x in y, potem $u\,P\,x$, xv, $v\,P\,y$, yu tvorijo Hamiltonov cikel. (Pozor: $a\,P\,b$ pomeni kos poti P med točkama a in b) Dokažimo obstoj x in y: Točka u ima $\deg(u)$ sosedov. Recimo, da točka v ni sosednja nobenemu predhodniku teh točk. Za sosede točke v lahko ostane le $|V(G)| - \deg(u) - 1 < \deg(w)$ kandidatov. To pa je protislovje.

$\square$

Izrek 4 (Orejev izrek) *Naj ima graf G vsaj tri točke in naj za poljubni nesosednji točki u in v velja* $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$. *Potem je G Hamiltonov.*

Dokaz. Grafu G dodajamo povezave:

$$G_0 := G, \qquad G_1 = G_0 + u_0 v_0, \qquad G_2 = G_1 + u_1 v_1, \qquad \dots \qquad G_p = K_n.$$

Graf G_p je poln graf, zato je Hamiltonov. Iz prejšne trditve sledi, da so vsi grafi G_i Hamiltonovi. Torej je G Hamiltonov.

$\square$

Izrek 5 (Diracov izrek) *Če ima graf G vsaj tri točke in velja* $\deg(w) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$ *za vsako točko w, potem je G Hamiltonov.*

Dokaz. Naj za vsako točko w grafa G velja $\deg(w) \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Sledi $\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{|V(G)|}{2} + \frac{|V(G)|}{2} = |V(G)|$. Po Orejevem izreku sledi, da je G Hamiltonov.

$\square$

Naloga 1 *Ugotovi, ali ima Petersenov graf Hamiltonovo pot oz. cikel.*

Problem trgovskega potnika

Problem 1 *Za dani uteženi polni graf poišči Hamiltonov cikel z najmanjšo utežjo.*

Motivacija: Trgovski potnik želi obiskati nekaj mest in se vrniti v začetno točko tako, da bo vsako mesto obiskal natanko enkrat in bo skupni strošek potovanja najmanjši.

Zgled:

Opomba: Problem trgovskega potnika je posplošitev Hamiltonovega problema.

Grayeve kode

Cikličnemu zaporedju 2^n bajtov, vsak dolžine n bitov, rečemo **Grayeva koda**, če se poljubna dva zaporedna bajta razlikujeta samo v enem bitu.

Te kode so dobile ime po fiziku Franku Grayu (iz Bellovih laboratorijev), ki jih je izumil leta 1953. Grayeve kode imajo široko uporabo v elektrotehniki.

Zgled:

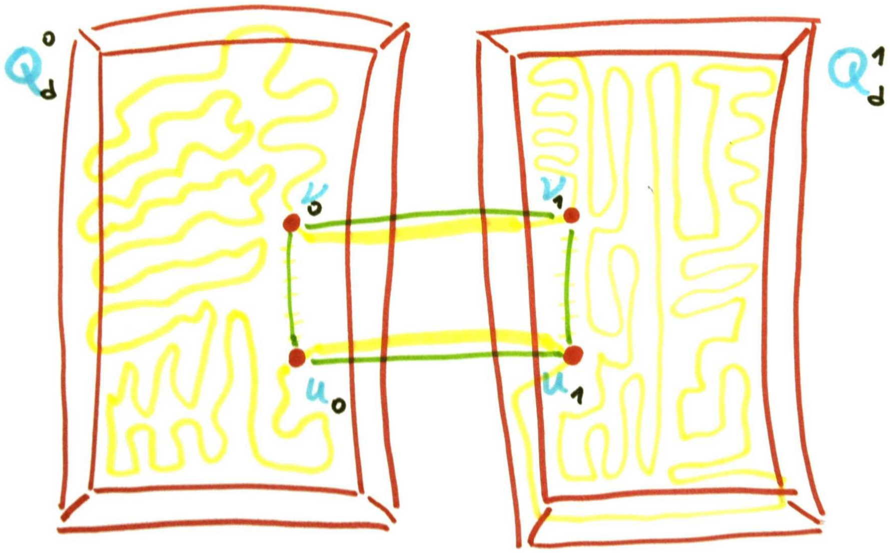
$$000 - 100 - 110 - 010 - 011 - 111 - 101 - 001$$

Opomba: Grayeve kode lahko generiramo kot Hamiltonove cikle hiperkock.

Zgled:

Izrek 6 *Vsaka hiperkocka Q_d $(d \geq 2)$ je Hamiltonov graf.*

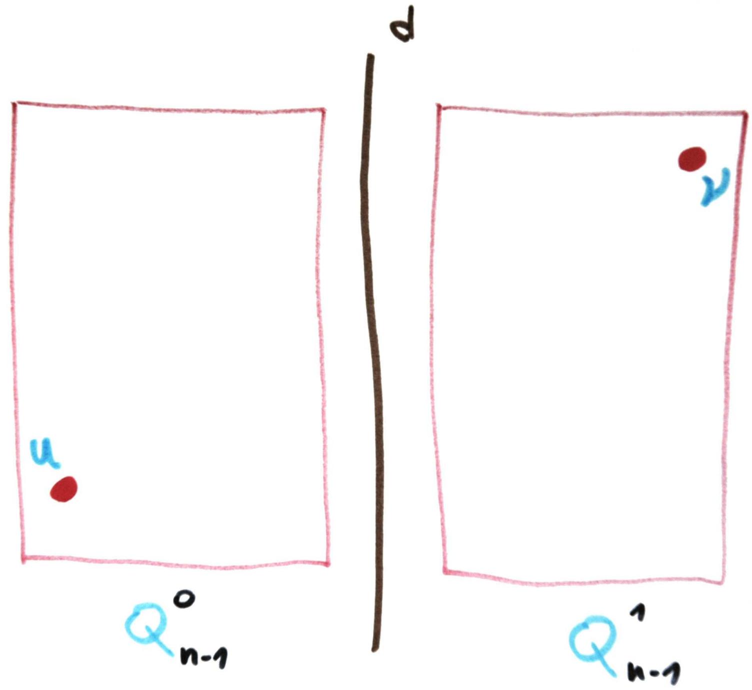
Dokaz. Z indukcijo po d. Preverimo za $d = 2$ ter pokažemo trditev za $d + 1$ ob predpostavki, da velja za d.

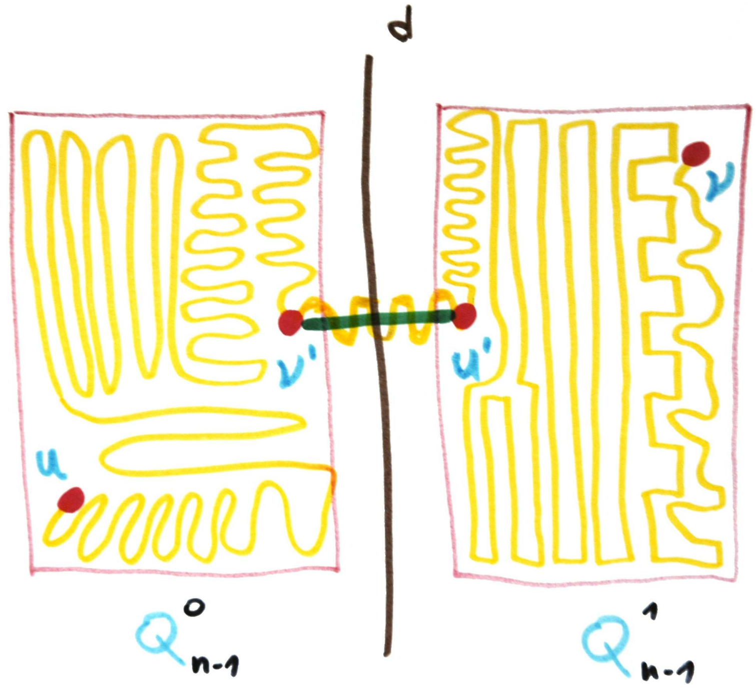


□

Vprašanje 1 *Naj bosta u, v dve poljubni točki v Q_n. Ali vedno obstaja Hamitonova pot med u in v?*

Dokaz. Radi bi podobno kot prej pokazali z indukcijo po n.





Domneva Kreverasa. *Naj bo M popolno prirejanje v hiperkocki Q_d ($d \geq 2$). Potem naj bi vedno obstajala Grayeva koda, ki vsebuje vse povezave prirejanja M!*