Delna urejenost

Relacija $(M, \preceq)$ je **delna urejenost**, če veljajo naslednje tri lastnosti:

- **refleksivnost:** $\forall a \in M : a \preceq a$
- **antisimetričnost:** $\forall a, b \in M : a \preceq b \text{ in } b \preceq a \Rightarrow a = b$
- **tranzitivnost:** $\forall a, b, c \in M : a \preceq b \text{ in } b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$

Elementa $x, y \in M$ sta **primerljiva**, če je $x \preceq y$ ali $x \preceq y$

Element 0 je **najmanjši** v delni urejenosti $(M, \preceq)$, če

$$\forall x \in M : 0 \preceq x$$

Element 1 je **največji** v delni urejenosti $(M, \preceq)$, če

$$\forall x \in M : x \preceq 1$$

Interval med $a, b \in M$ je

$$[a, b] = \{x : a \preceq x \preceq b\}$$

Inverz delne urejenosti $\preceq$ označimo z $\succeq$, tj.

$$\succeq \; := \; \preceq^{-1}$$

Naloga 1 *Naj bo A neprazna mnoǐca. Pokaži, da je* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *delna urejenost.*

Naloga 2 *Pokaži, da je množica deliteljev* $D(n)$ *naravnega števila* n *s relacijo deljivosti* $|$ *delna urejenost.*

Naloga 3 *Nariši Hassejev diagram delne urejenosti* $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Naloga 4 *Nariši Hassejev diagram delne urejenosti* $(D(60), |)$.

Supremum in Infimum

Najmanjša zgornja meja $\sup(a, b)$ elementov a ter b je element $\gamma \in M$, za katerega velja:

- $a \preceq \gamma$ in $b \preceq \gamma$;
- če za poljuben $x \in M$ velja $a \preceq x$ in $b \preceq x$, potem $\gamma \preceq x$.

Največja spodnja meja $\inf(a, b)$ elementov a ter b je element $\lambda \in M$, za katerega velja:

- $\lambda \preceq a$ in $\lambda \preceq b$;
- če za poljuben $x \in M$ velja $x \preceq a$ in $x \preceq b$, potem $x \preceq \lambda$.

Trditev 1 *V delni urejenost naslednje trditve so enakovredne:*

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a = \inf(a, b) \quad \Leftrightarrow \quad b = \sup(a, b)$$

Mreže

Relacijska definicija

Def. R Delna urejenost $(M, \preceq)$ je **mreža**, če za vsak par $a, b \in M$ obstajata elementa:

- $\sup\{a, b\}$
- $\inf\{a, b\}$.

Zgled: Delna urejenost $(D(n), |)$ je mreža ter velja

$$\inf(a, b) = \gcd(a, b) \quad \text{in} \quad \sup(a, b) = \operatorname{lcm}(a, b).$$

Zgled: Delna urejenost $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je mreža ter velja

$$\inf(X, Y) = X \cap Y \quad \text{in} \quad \sup(X, Y) = X \cup Y.$$

Algebrska definicija

Def. A Algebrajska struktura $(M, \vee, \wedge)$ je **mreža**, če veljajo naslednje lastnosti:

- **idempotentnost:** $$a \vee a = a$$ $$a \wedge a = a$$
- **komutativnost:** $$a \vee b = b \vee a$$ $$a \wedge b = b \wedge a$$
- **asociativnost:** $$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$ $$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
- **absorpcija:** $$a \vee (a \wedge b) = a$$ $$a \wedge (a \vee b) = a$$

Zgled: Izjavni račun $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$ je mreža.

Zveza med algebrajsko ter relacijsko definicijo mreže

Velja nasledje:

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \vee b = b \quad (\Leftrightarrow \quad a \wedge b = a)$$

ter

$$\sup\{a, b\} = a \vee b \quad \text{in} \quad \inf\{a, b\} = a \wedge b.$$

Omejenost in komplementarnost

Mreža je **omejena**, ko v njej obstaja največji element 1 in najmanjši element 0:

$$\forall a : 0 \preceq a \preceq 1$$

oz. ekvivalentno:

$$0 \vee a = a \quad \text{in} \quad 0 \wedge a = 0$$

$$1 \vee a = 1 \quad \text{in} \quad 1 \wedge a = a.$$

Trditev 2 *Vsaka končna mreža je omejena.*

Dokaz.

□

V omejeni mreži je element b **komplement** elementa a, če velja

$$a \vee b = 1 \quad \text{in} \quad a \wedge b = 0.$$

Mreža je **komplementarna**, če ima vsak element komplement.

Opomba 1 *V splošnem ima element lahko več komplementov.*

Homomorfizem mrež

Naj bosta $(M, \vee, \wedge)$ ter $(N, \sqcup, \sqcap)$ mrež. Preslikava $h : M \to N$ je **homomorfizem mrež**, če $\forall x, y \in M$ velja

$$h(x \vee y) = h(x) \sqcup h(y) \quad \text{in} \quad h(x \wedge y) = h(x) \sqcap h(y).$$

Kadar je h bijekcija, potem imamo **izomorfizem mrež**.

Če sta M ter N omejeni mreži potem surjektivni homomrfizem h ohranja "mejne" elemente:

$$h(0_M) = 0_N \quad \text{in} \quad h(1_M) = 1_N.$$

Podmreže

Naj bo $(M, \vee, \wedge)$ mreža ter N neprazna podmnožica v M tako, da velja pogoj

$$\forall a, b \in N : a \vee b \in N \ \text{ in } \ a \wedge b \in N,$$

potem rečemo, da je $(N, \vee, \wedge)$ **podmreža** v $(M, \vee, \wedge)$.

Distributivne mreže

Mreža je **distributivna**, če veljata oba distributivna zakona:

(D1) $\quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(D2) $\quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Trditev 3 *Če v mreži* $(M, \vee, \wedge)$ *velja eden od zakonov* $(D1)$ *in* $(D2)$ *potem velja še drugi.*

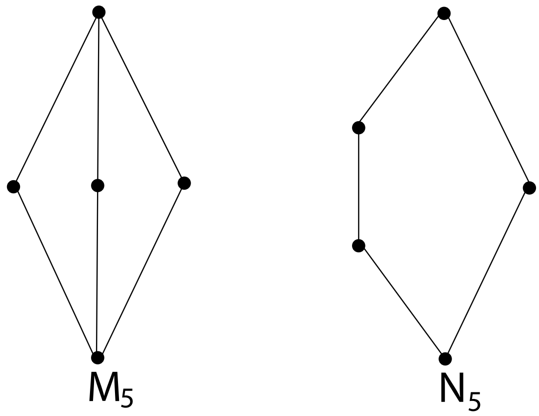
Dokaz. Predpostavimo, da velja $(D1)$ ter izpeljimo $(D2)$:

$$\begin{aligned}
a \vee (b \wedge c) &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\
&= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\
&= a \vee ((c \wedge a) \vee (c \wedge b)) \\
&= a \vee (c \wedge (a \vee b)) \\
&= a \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
&= (a \wedge (a \vee b)) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
&= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\
&= (a \vee b) \wedge (a \vee c)
\end{aligned}$$

Podobno pokažemo, da iz $(D2)$ sledi $(D1)$. $\square$

Opis distributivnih mrež

Naloga 5 *Pokaži da mreži* M_5 *in* N_5 *nista distribitivna.*



Izrek 4 (Birkhoff) *Mreža je distributivna natanko takrat ko ne vsebuje* M_5 *in* N_5 *kot podmreže.*

Booleova algebra

Komplementarni distributivni mreži rečemo **Booleova algebra**.

Trditev 5 *V Booleovi algebri ima vsak element natanko en komplement.*

Dokaz. Recimo da sta b in c komplementa elementa a. Tedaj velja

$$\begin{aligned} b &= b \wedge 1 \\ &= b \wedge (a \vee c) \\ &= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \\ &= 0 \vee (b \wedge c) \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ &= (a \vee b) \wedge c \\ &= 1 \wedge c \\ &= c \end{aligned}$$

□

Komplement elementa a označimo z $\neg a$.

Booleovo algebro označimo z $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg)$.

Trditev 6 *Naj bo $h : B_1 \to B_2$ surjektivni homomorfizem Booleovih algebrah. Potem velja*

$$\forall x \in B_1 : h(\neg x) = \neg h(x).$$

Dualnost

Naj bo $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg)$ Booleova algebra.

Lahko priredimo novo algebro $\mathcal{B}^* = (B, \wedge, \vee, \neg)$.

Velja:

- 0 v $\mathcal{B}$ je 1 v $\mathcal{B}^*$;
- 1 v $\mathcal{B}$ je 0 v $\mathcal{B}^*$;
- $\vee$ v $\mathcal{B}$ je $\wedge$ v $\mathcal{B}^*$;
- $\wedge$ v $\mathcal{B}$ je $\vee$ v $\mathcal{B}^*$;

Vprašanje 1 *Kako dobimo Hassejevega diagrama algebre $\mathcal{B}^*$ iz diargama algebre $\mathcal{B}$?*

Opomba 2 *Za vsako trditev $\mathcal{T}$ obstaja dualna trditev $\mathcal{T}^*$, ki ja dobimo iz $\mathcal{T}$ tako, da zamenjamo $\vee$ and $\wedge$. Opazi, da je $D_1^* = D_2$.*

De Morganova zakona

Trditev 7 *V Booleovi algebri veljata De Morganova zakona:*

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \quad \textit{in} \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

Dokaz. Ker sta De Morganova zakona dualna, bo dovolj, če pokažemo enega. Da bi pokazali prvi zakon bo dovolj, če preverimo naslednji zvezi:

$$(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = 0$$

ter

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1$$

Prvo zvezo izpeljemo takole:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= (a \wedge (b \wedge (\neg a \vee \neg b)) \\
&= (a \wedge [(b \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg b)] \\
&= a \wedge b \wedge \neg a \\
&= b \wedge 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Zdaj pa še drugo zvezo, pa bo konec dokaza:

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &= ((a \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg a)) \vee \neg b \\
&= (1 \wedge [(b \vee \neg a) \vee \neg b] \\
&= b \wedge \neg b \vee a \\
&= 1 \vee a \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Opis Booleovih algebrah

Naloga 6 *Naj bo A množica. Preveri, da je* $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$ *Booleova algebra. Kako je definiran komplement* $\neg X$ *za poljubno množico* $X \in \mathcal{P}(A)$*?*

Izrek 8 (Stone) *Vsaka Booleova algebra je izomorfna Booleovi algebri* $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$ *za neko množico* A*.*

Vprašanje 2 *Ali obstaja Booloeova algebra z 10-mi elementi?*