Osnovno o grafih

March 2, 2008

Če odnose med določenimi objekti opišemo z dvomestno relacijo, lahko to relacijo tudi ”narišemo” (oz. grafično upodobimo). Recimo, da je relacija simetrična in irefleksivna. Na primer:

Takemu objektu pravimo **graf**. Pri tem sama slika ni pomembna, isti graf bi lahko narisali tudi takole:

Pomembno je le to, kakšna je osnovna relacija, tj. med katerimi pari imamo povezave in med katerimi povezav ni.

Grafi se kot model pojavljajo v različnih vedah:

kemija: molekularni grafi, grafi kemijskih reakcij;

elektrotehnika: električna vezja;

operacijske raziskave: omrežja - transportna, komunikacijska;

ekonomija: odnosi med ekonomskimi subjekti;

genetika: struktura genov;

sociologija, psihologija: odnosi med socialnimi skupinami ali posamezniki;

teoretično računalništvo: algoritmi, baze podatkov, komunikacijska omrežja;

matematika: kombinatorika, topologija.

Definicija

V – končna neprazna množica;

E – poljubna družina dvoelementnih podmnožic množice V.

Paru $G = (V, E)$ pravimo **graf**

- na **množici točk** $V = V(G)$; in
- z **množico povezav** $E = E(G)$.

Element $\{u, v\}$ množice E pišemo krajše kot uv.

Kadar je par točk uv element množice E pravimo, da sta točki u in v **sosednji** v grafu G in pišemo $u \sim_G v$ (ali samo $u \sim v$).

Za povezavi pravimo, da sta **sosednji**, če imata kako skupno krajišče.

Včasih obravnavamo tudi grafe, ki imajo

- **vzporedne povezave** – več povezav nad istim parom točk;
- **zanke** – povezave, ki imajo obe krajišči enaki.

Takim grafom bomo rekli **multigrafi**.

Kadar želimo poudariti, da govorimo o grafih brez zank in vzporednih povezav, takim grafom rečemo **enostavni grafi**.

Stopnja

Stopnja točke u v grafu G, označimo jo z $\deg_G(u)$ ali $d_G(u)$, je število povezav grafa G, ki imajo točko u za svoje krajišče.

Točkam stopnje 0 pravimo **izolirane točke**, točkam stopnje 1 pa **listi**.

Najmanjšo stopnjo točke grafa G označimo z $\delta(G)$, največjo pa z $\Delta(G)$.

Graf G je **regularen**, če velja $\delta(G) = \Delta(G)$, in d-**regularen**, če velja $d = \delta(G) = \Delta(G)$.

Grafom, ki so 3-regularni, pravimo tudi **kubični** grafi.

Naloga 1 *Dokaži, da v skupini dveh ali več ljudi lahko vedno najdemo dva, ki imata v tej skupini enako število prijateljev!*

Dokaz.

Matrike grafov

G graf

$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

Matrike sosednosti $A(G)$

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Incidenčna matrika $B(G)$

$$B(G) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i \in e_j \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Stopnje točk in število povezav grafa so povezane z naslednjo enakostjo:

Lema 1 (O rokovanju). *Za vsak graf G velja*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2 \cdot |E(G)| \,.$$

Posledica 2 *Za r-regularni graf G velja zveza*

$$r \cdot |V(G)| = 2 \cdot |E(G)|.$$

Posledica 3 *Vsak graf ima sodo mnogo točk lihe stopnje.*

Podgrafi

Graf H je **podgraf** grafa G, oznaka $H \subseteq G$, če velja

$$V(H) \subseteq V(G) \quad \text{in} \quad E(H) \subseteq E(G).$$

Podgraf H je **vpet**, če velja $V(H) = V(G)$.

Podgraf H je **induciran (z množico točk)** $U \subseteq V(G)$, če velja

$$V(H) = U \quad \text{in} \quad E(H) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}.$$

Pišemo tudi $H = G[U]$.

Podobno definiramo tudi podgraf grafa G, **inducirano z množico povezav** $F \subseteq E(G)$, kot podgraf H, za katerega velja

$$E(H) = F \quad \text{in} \quad V(H) = \{u \in V(G) \mid \exists e \in F : u \text{ je krajišče } e\}.$$

Tak podgraf označimo z $G[F]$.

Naloga 2 *Za dani graf preštej število podgrafov.*

Naloga 3 *Za graf iz prejšne naloge preštej število induciranih podgrafov.*

Naloga 4 *Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Ugotovi, koliko vpetih in koliko induciranih podgrafov ima graf G!*

Nekatere družine grafov

Polni grafi K_n: $V(K_n) = \mathbb{Z}_n$, $E(K_n) = \{uv \mid u, v \in \mathbb{Z}_n, u \neq v\}$.

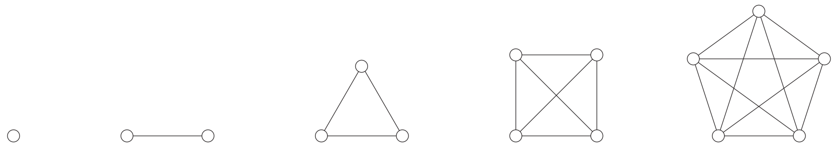


Figure 1: Polni grafi K_1, K_2, K_3, K_4 in K_5.

Polni graf K_n ima n točk in $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ povezav in je $(n-1)$-regularen.

Poti P_n: $V(P_n) = \mathbb{Z}_n$, $E(P_n) = \{u(u+1) \mid u = 0, 1, \ldots, n-2\}$.

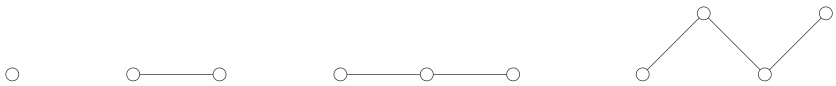


Figure 2: Poti P_1, P_2, P_3 in P_4.

Pot P_n ima n točk in $n-1$ povezav (njena **dolžina** je $n-1$). Za $n = 1$ in $n = 2$ je enaka grafu K_n.

Cikli C_n $(n \geq 3)$: $V(C_n) = \mathbb{Z}_n$, $E(C_n) = \{u(u+1) \mid u \in \mathbb{Z}_n\}$.

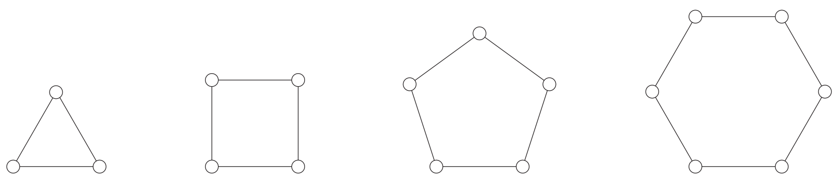


Figure 3: Cikli C_3, C_4, C_5 in C_6.

Kadar dopuščamo tudi multigrafe, sta definirana še cikla C_1 (zanka) in C_2 (par vzporednih povezav). Cikel C_n ima n točk in n povezav. Je 2-regularen graf. Cikel C_3 imenujemo tudi **trikotnik**.

Graf G je **dvodelen**, če lahko množico točk $V(G)$ zapišemo kot disjunktno unijo dveh podmnožic $A, B \subseteq V(G)$ tako, da je za vsako povezavo $uv \in E(G)$ ena od točk u, v vsebovana v množici A, druga pa v množici B.

A in B imenujemo **množici dvodelnega razbitja** grafa G.

Trditev 4 *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(a) Graf je dvodelen;

(b) Graf je 2-obarljiv (pobarvamo točke z dvema barvama tako, da nista dve sosednji točki enako obarvani);

(c) Graf ne vsebuje lihega cikla.

Dokaz.

Polni dvodelni grafi $K_{m,n}$: $V(K_{m,n}) = A \cup B$, kjer velja $|A| = m$, $|B| = n$ in $A \cap B = \emptyset$, $E(K_{m,n}) = \{uv \mid u \in A, v \in B\}$.

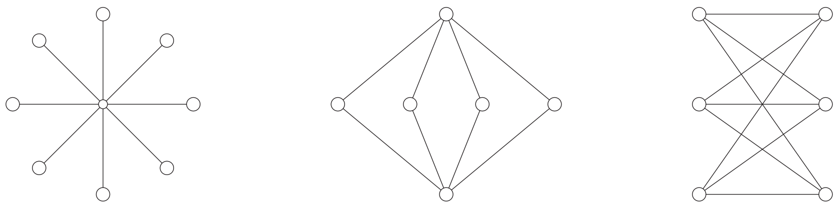


Figure 4: Polni dvodelni grafi $K_{1,8}$, $K_{2,4}$ in $K_{3,3}$.

Polni dvodelni graf $K_{m,n}$ ima $m+n$ točk in mn povezav. Grafom $K_{1,n}$ pravimo tudi **zvezde**.

Kolesa W_n $(n \geq 3)$: $V(W_n) = \mathbb{Z}_n \cup \{\infty\}$, $E(W_n) = \{u(u+1), u\infty \mid u \in \mathbb{Z}_n\}$.

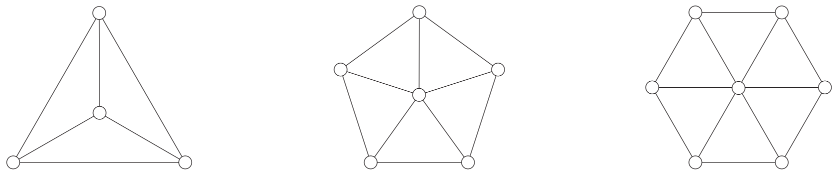


Figure 5: Kolesa W_3, W_5 in W_6.

Graf W_n ima $n+1$ točk in $2n$ povezav.

Hiperkocke Q_d: $V(Q_d) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_d) \mid u_i \in \{0,1\}\}$, $E(Q_n) = \{uv \mid u, v \in V(Q_d) : \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i| = 1\}$.

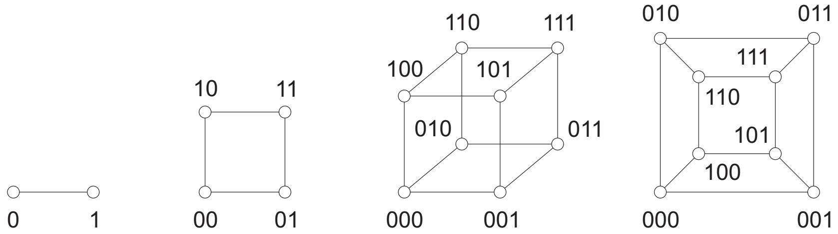


Figure 6: Hiperkocki Q_1 in Q_2 ter dve sliki hiperkocke Q_3.

Običajno med hiperkocke štejemo tudi 0-razsežno kocko $Q_0 = K_1$.

Hiperkocka Q_d (skelet d-razsežne kocke) ima 2^d točk ter $d \cdot 2^{d-1}$ povezav in je d-regularen graf.

Trditev 5 *Hiperkocke so dvodelni grafi.*

(**Namig:** za množici dvodelnega razbitja vzamemo množico točk, ki imajo sodo mnogo komponent enakih 0, in množico točk, ki imajo liho mnogo komponent enakih 0.)

Posplošeni Petersenovi grafi $P_{n,k}$ ($n \geq 3$ in $0 < k < n$): $V(P_{n,k}) = \{u_i, v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, $E(P_{n,k}) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$.

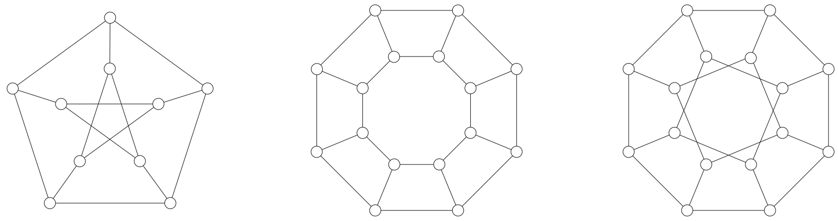


Figure 7: Petersenov graf in posplošena Petersenova grafa $P_{8,1}$ in $P_{8,2}$.

Posplošeni Petersenov graf $P_{n,k}$ ima $2n$ točk. Če je $n \neq 2k$, ima $3n$ povezav in je kubičen graf, za $n = 2k$ pa ima $\frac{5n}{2}$ povezav in velja $\delta(P_{n,k}) = 2$, $\Delta(P_{n,k}) = 3$.

Družina ima ime po **Petersenovem grafu** $P_{5,2}$.

Krožni grafi $\mathrm{Cir}(n; S)$: Naj bo S poljubna podmnožica množice $\mathbb{Z}_n$, ki ne vsebuje elementa 0 in ki z vsakim elementom $s \in S$ vsebuje tudi nasprotni element $n - s$. **Krožni graf** $G = \mathrm{Cir}(n; S)$ na n točkah in s **simbolom** S je določen takole:

$$V(G) = \mathbb{Z}_n \qquad \text{in} \qquad E(G) = \{uv \mid u - v \in S\}.$$

Med krožne grafe spadajo polni grafi in cikli:

- $K_n = \mathrm{Cir}(n; \{1, 2, \ldots, n-1\})$; in
- $C_n = \mathrm{Cir}(n; \{1, n-1\})$.

Krožni graf $\mathrm{Cir}(n; S)$ ima n točk in $\frac{n|S|}{2}$ povezav in je $|S|$-regularen graf.

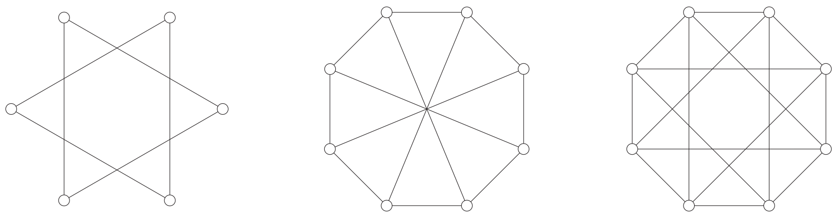


Figure 8: Krožni grafi $\mathrm{Cir}(6; \{2, 4\})$, $\mathrm{Cir}(8; \{1, 4, 7\})$ in $\mathrm{Cir}(8; \{1, 3, 5, 7\})$.

Operacije z grafi

Odstranjevanje točk: Naj bo G graf in $u \in V(G)$. Z $G - u$ označimo graf, ki ga dobimo tako da

- iz $V(G)$ odstranimo točko u;
- iz $E(G)$ odstranimo vse povezave, ki imajo za krajišče u.

Odstranjevanje povezav: Naj bo G graf in $e \in E(G)$. Z $G-e$ označimo graf, ki ga dobimo tako da

- iz $E(G)$ odstranimo povezavo e.

Komplementarni graf: Naj bo G graf. Grafu $\overline{G}$ z isto množico točk kot graf G, v katerem sta dve točki sosednji natanko tedaj, ko nista sosednji v grafu G, pravimo **komplementarni graf** (tudi **komplement**) grafa G.

Unija grafov: Unija grafov G_1 in G_2 je graf $G = G_1 \cup G_2$ z

- množico točk $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$; in
- množico povezav $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Če je $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, govorimo o **disjunktni uniji** grafov.

Skrčitev povezave: Naj bo $e \in E(G)$. Z G/e označimo graf, ki ga dobimo iz grafa G tako, da identificiramo krajišči povezave e in odstranimo zanko (ta nastane iz povezave e) ter morebitne vzporedne povezave (te nastanejo, če je povezava e vsebovana v trikotnikih grafa G). Če delamo z multigrafi, potem nastalih vzporednih povezav ne odstranjujemo.

Naloga 5 *Skrči pet povezav v Petersenovem grafu, da dobiš K_5.*

Spoj grafov: Spoj grafov G_1 in G_2, kjer je $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, je graf $G = G_1 * G_2$, ki je določen takole:

$$\begin{aligned} V(G) &= V(G_1) \cup V(G_2)\,, \\ E(G) &= E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}\,. \end{aligned}$$

Spoj ima $|V(G_1)| + |V(G_2)|$ točk in $|E(G_1)| + |E(G_2)| + |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$ povezav.

Primer spoja grafov so kolesa in polni dvodelni grafi:

$$W_n \simeq K_1 * C_n \quad \text{in} \quad K_{m,n} \simeq \overline{K_m} * \overline{K_n}.$$

Kartezični produkt: Kartezični produkt grafov $G_1 = (V_1, E_1)$ in $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G = G_1 \Box G_2$, ki ima množico točk

$$V(G) = V_1 \times V_2 \, ,$$

sosednost pa je določena s predpisom

$$\begin{aligned}(u_1, v_1) \ \sim_G \ (u_2, v_2) \ &\Longleftrightarrow \\ &(u_1 \sim_{G_1} u_2 \ \wedge \ v_1 = v_2) \vee (u_1 = u_2 \ \wedge \ v_1 \sim_{G_2} v_2) \, .\end{aligned}$$

Kartezični produkt ima $|V_1| \cdot |V_2|$ točk in $|V_1| \cdot |E_2| + |V_2| \cdot |E_1|$ povezav.

Primer standardne družine, konstruirane s pomočjo kartezičnega produkta, so hiperkocke:

$$Q_d = \underbrace{K_2 \Box \cdots \Box K_2}_{d \text{ faktorjev}} \, .$$

Graf povezav: Naj bo G graf z vsaj eno povezavo. Graf povezav $L(G)$ grafa G je določen takole:

$$V(L(G)) = E(G) \quad \text{in} \quad E(L(G)) = \{ef \mid e, f \in E(G), e \cap f \neq \emptyset\}\,.$$

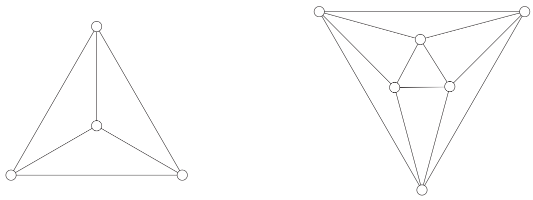


Figure 9: Graf K_4 (tetraeder) in njegov graf povezav $L(K_4)$ (oktaeder).

Graf povezav ima $|E(G)|$ točk in $\frac{1}{2}\sum_v (\deg_G(v))^2 - |E(G)|$ povezav.

Izomorfizem grafov

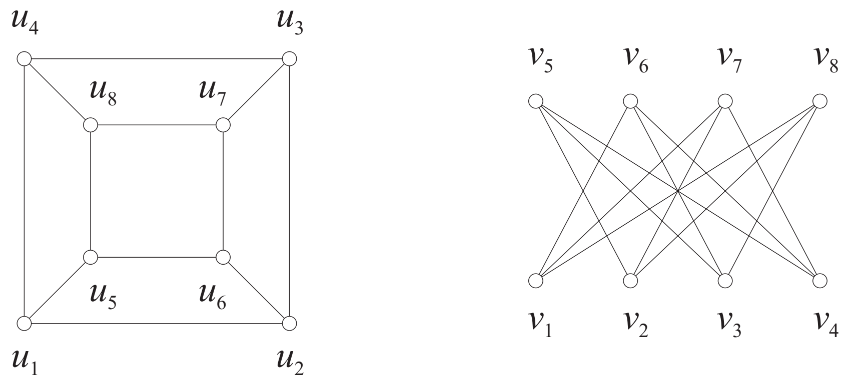
Vzemimo grafa G_1 in G_2. Preslikava $h : V(G_1) \to V(G_2)$ je **izomorfizem**, če velja:

- h je bijekcija;
- $uv \in E(G_1)$ natanko tedaj, ko je $h(u)h(v) \in E(G_2)$.

V tem primeru, grafa G_1 in G_2 sta **izomorfna**, označimo $G_1 \simeq G_2$.

V primeru, ko je graf G_1 kar enak grafu G_2, izomorfizmu grafov pravimo **avtomorfizem**.

Naloga 6 *Pokaži, da sta grafa izomorfna.*



Trditev 6 *Izomorfnost* ($\simeq$) *je ekvivalenčna relacija.*

Grafovske invariante

Lastnosti grafa, ki jo imajo poleg grafa samega tudi vsi z njim izomorfni grafi, pravimo **invarianta** grafa.

Grafovske invariante so na primer:

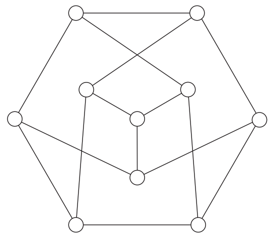
- število točk
- število povezav
- število komponent
- število točk stopnje 4
- število trikotnikov
- dvodelnost
- število mostov
- ....
- ....

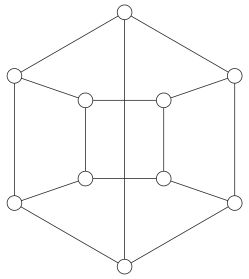
Osnovni način, s katerim dokažemo, da grafa nista izomorfna, je, da poiščemo grafovsko invarianto, v kateri se obravnavana grafa ločita.

Pozor: Matrika sosednosti $A(G)$ ni grafovska invarianta, ker je odvisna od vrstnega reda oz. oštevilčenja vozlišč. Tudi incidenčna matrika $B(G)$ ni invarianta.

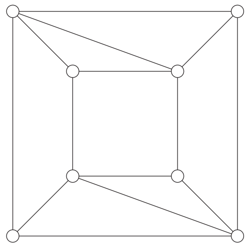
Dolžini najkrajšega cikla v grafu pravimo **notranji obseg** oz. **ožina** grafa.

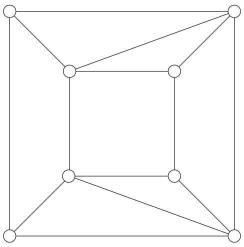
Spodnja grafa nista izomorfna, ker imata različno ožino.

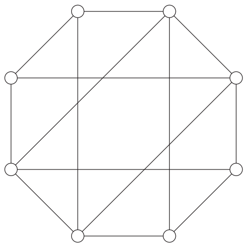




Naloga 7 *Pokaži, da so grafi paroma neizomorfni.*







Sprehodi

Zaporedje točk in povezav

$$S = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots v_{k-1} e_k v_k, \qquad \text{kjer je } e_i = v_{i-1} v_i$$

imenujemo **sprehod** v grafu.

Velikokrat zapišemo samo zaporedje točk

$$S = v_0 v_1 v_2 \cdots v_k$$

Dolžina sprehoda $S = v_0 v_1 v_2 \cdots v_k$ je enaka številu povezav k.

Obhod je sklenjen sprehod t.j. $v_0 = v_k$.

Sprehod je **enostaven**, kadar so vse povezave $e_1, e_2, \ldots, e_k$ med seboj različne.

Enostavni sprehod je **pot**, kadar so vse točke $v_0, v_1, \ldots, v_k$ med seboj različne.

Enostavni sprehod je **cikel**, kadar so vse točke $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ med seboj različne in $v_0 = v_k$.

Trditev 7 *Če v grafu obstaja sprehod od u do v, potem obstaja pot od u do v.*

Komponente in razdalja

Točki grafa sta v isti **povezani komponenti** tedaj, ko v grafu med njima obstaja pot.

Število povezanih komponent grafa G bomo označili z $\Omega(G)$.

Graf je **povezan**, če ima eno samo povezano komponento, tj. $\Omega(G) = 1$.

Razdaljo $d_G(u, v)$ med točkama $u, v \in V(G)$ v grafu G definiramo kot dolžino najkrajše poti od u do v v G. Če taka pot ne obstaja, za razdaljo vzamemo vrednost ∞.

S tako definirano razdaljo postane povezan graf G **metrični prostor** oz. veljajo naslednje lastnosti:

1. $\forall v \in V(G): \ d(v, v) = 0$;
2. $\forall u, v \in V(G): \ d(u, v) = d(v, u)$;
3. $\forall u, v, w \in V(G): \ d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Največji razdalji med parom točk grafa pravimo **diameter** oz. **premer** grafa,

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}\,.$$

Naloga 8 *Izračunaj diameter grafov* $K_n, P_n, C_n, K_{n,n}, Q_n$*!*

Izometrični podgrafi

Podgraf H grafa G je **izometrični podgraf**, če se razdalje med točkami ohranjajo, tj.

$$\forall u, v \in V(H) : d_H(u, v) = d_G(u, v).$$

Naloga 9 *Poišči izometrični 6-cikel v Q_3. Pošči še 6-cikel v Q_3, ki ni izometrični.*

Trditev 8 *Vsak izometrični podgraf je induciran.*

Trditev 9 *Naj bo C najkrajši cikel v nekem grafu G s končno ožino. Tedaj je C izometrični podgraf.*

Intervalni in konveksni podgrafi

Naj bosta $u, v \in V(G)$. **Intervalni graf** $I_G(u,v)$ je podgraf grafa G induciran z vseh vozlišč, ki pripadajo kakšni najkrajši poti med u in v.

Graf H je **konveksni podgraf** grafa G, če je za vsak par točk u, v, $I_G(u,v)$ podgraf grafa H.

Naloga 10 *Kakšne konveksne podgrafe ima Q_3?*

Naloga 11 *Kakšne konveksne podgrafe ima mreža $n \times m$?*

Naloga 12 *Ali je vsak intervalni podgraf $I_G(u,v)$ konveksni?*

Naloga 13 *Pokaži, da je vsak konveksni podgraf tudi izometrični podgraf.*

Prirejanja in faktorji

M množica povezav grafa G je **prirejanje**, če nobeni dve povezavi iz M nimata skupnega krajišča.

k**-faktor** je vpet k-regularen podgraf.

1-faktorju rečemo tudi **popolno prirejanje**.

Zgledi:

Naloga 14 *Izračunaj*

- *Koliko popolnih prirejanj ima graf* $K_{n,n}$*?*
- *Koliko različnih (ne-izomorfnih) 1-faktorjev ima* Q_3*? Kaj pa 2-faktorjev?*

Problem 1 *Dokaži, da* Q_d *vsebuje* k*-faktor za vsak* $k \in \{0, \ldots, d\}$*!*