# Permutacijske grupe

R. Škrekovski

5. maj 2013

## Permutacije

Ponovimo iz DS I:

$A$ - končna množica;

$S(A)$ - množica vseh permutacij na $A$;

$\circ$ - kompozitum oz. produkt funkcij;

$S_n := S(A)$ za $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, velja $|S_n| = n!$

**Trditev 1** *Velja:*

- *Vsaka permutacija se da (enolično) razcepiti na produkt disjunktnih ciklov.*
- *Vsaka permutacija je bodisi soda ali liha (odvisno od števila transpozicij)*

**Zgledi:** $(123)(45)$ je liha permutacija, $(125)(34)(6789)$ pa je soda permutacija.

**Vemo:**

- id je soda permutacija,
- $\pi$ ter $\pi^{-1}$ sta enake parnosti,
- Če sta $C_1$ ter $C_2$ disjunktna cikla, potem $C_1 \circ C_2 = C_2 \circ C_1$,
- Če je $C = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n)$, potem je $C^{-1} = (a_n\, a_{n-1}\, \cdots\, a_1)$
- Če je $\pi = C_1 \circ C_2 \cdots C_k$ disjunktni razcep, potem je $\pi^{-1} = C_1 \circ C_2 \cdots C_k$

**Trditev 2** *Naj bo $C$ cikel dolžine $m$. Potem je* $\mathrm{red}(C) = m$.

**Dokaz.**

**Trditev 3** *Naj bo permutacija $\pi$ kompozitum tujih ciklov dolžine $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Potem je* $\mathrm{red}(\pi) = \mathrm{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

**Dokaz.**

# Simetrična grupa

Pokazali bomo, da je $(S(A), \circ)$ grupa. To grupo imenujemo *simetrična grupa* množice $A$.

**Izrek 4** $(S(A), \circ)$ *je grupa.*

**Dokaz.** Pokažemo po vrsti vse lastnosti grupe.

**zaprtost:** $f, g \in S(A)$ potem je $f \circ g : A \to A$. Pokazati še moramo, da je $f \circ g$ permutacija, tj. bijekcija.

- *Injektivnost funkcije $f \circ g$:*

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= (f \circ g)(y) \\ f(g(x)) &= f(g(y)) \\ g(x) &= g(y) \qquad \text{(ker je } f \text{ injektivna)} \\ x &= y \qquad \text{(ker je } g \text{ injektivna)} \end{aligned}$$

- *Surjektivnost funkcije $f \circ g$:* Naj bo $y \in A$ poljuben. Ker je $f$ surjektivna, obstaja $z \in A$ tako, da je $y = f(z)$. In, ker je $g$ surjektivna, obstaja $x \in A$ tako, da je $g(x) = z$. Torej, obstaja tak $x$, da je $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = y$.

**asociativnost:** Sledi iz

$$((f \circ g) \circ h)(x)) = (f \circ g)(h((x)) = f(g(h(x)))$$

in

$$(f \circ (g \circ h))(x)) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

**enota:** Enota je permutacija $\mathrm{id} : x \mapsto x$.

**inverz:** Če je $f : A \to A$ bijekcija, potem vemo, da obstaja bijektivna funkcija $f^{-1} : A \to A$ tako, da velja:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{in} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

To pa je enakovredno pogoju za obstoj inverza v grupi:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id} \quad \text{in} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}.$$

□

*Permutacijska grupa* je vsaka podgrupa $\Gamma$ grupe $S(A)$. Rečemo tudi da $\Gamma$ *deluje* na množico $A$.

**Opomba 1** *$S_n$ ni Abelova (tj. komutativna) za $n \geq 3$. Velja:*

$$(12)(23) = (123) \neq (132) = (23)(12).$$

**Zgled:** $S_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132), (1)(23), (2)(13), (12)(3)\}$

$A_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$ je podgrupa v $S_3$. Velja še več, $A_3$ je edinka v $S_3$.

**Trditev 5** *$S_3$ je najmanjša nekomutativna grupa.*

# Alternirajoča grupa

**Alternirajoča grupa** $A_n$ je definirana takole

$$A_n = \{f \in S_n \mid f \text{ soda permutacija}\}$$

V naslednjem izreku pa pokažemo, da je $A_n$ grupa.

**Izrek 6** *Za $A_n$ ter $S_n$ verja naslednje:*

(1) *$A_n$ je podgrupa v $S_n$;*

(2) *Indeks grupe $S_n$ po podgrupi $A_n$ je 2, t.j. $[S_n : A_n] = 2$;*

(3) *$|A_n| = n!/2$.*

**Dokaz.** (1) Če $\pi, \sigma$ sodi, potem $\pi \circ \sigma$ soda permutacija. Torej je $A_n$ grupa.

Definirajmo $F : A_n \to S_n \setminus A_n$ takole

$$F(f) = (12) \circ f.$$

Očitno, $F$ je bijekcija. Zato

$$|A_n| = |S_n \setminus A_n| \text{ ter } |S_n| = |A_n| + |S_n \setminus A_n| = 2|A_n|.$$

Od tod sledita (2) in (3). $\square$

**Posledica 7** *Alternirajoča grupa $A_n$ je podgrupa edinka v simetrični grupi $S_n$.*

**Dokaz.** Po prejšnjem izreku, je $A_n$ podgupa v $S_n$ z $[S_n : A_n] = 2$. Potem dokaz sledi takoj.

# Cayleyjev izrek

**Izrek 8** *Vsaka grupa je izomorfna neki permutacijski grupi.*

**Dokaz.** Naj bo $(G, *)$ grupa. Za vsak element $a \in G$ definiramo $f_a : G \to G$ z predpisom

$$f_a(x) = a * x.$$

Opazimo, da je $f_a$ permutacija iz $S(G)$. Naj bo $h : G \to S(G)$ tako, da je $h(a) = f_a$. Trdimo, da je $h$ homomorfizem:

$$h(ab)(x) = (a * b) * x = a * (b * x) = f_a(f_b(x)) = (h(a) \circ h(b))(x)$$

Trdimo, da je $h$ injektivna preslikava:

$$h(a) = h(b) \Rightarrow f_a = f_b \Rightarrow \forall x \in G : a * x = b * x \Rightarrow a = b$$

Torej sledi, da je grupa $G$ izomorfna svoji sliki $\mathrm{im}(h)$ v $S(G)$. Ker pa je $\mathrm{im}(h)$ podgrupa iz $S(G)$, je dokaz končan. $\square$

**Naloga 1** *Konstruiraj perutacijsko grupo izomorfno grupi* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

# Grupa automorfizmov grafa

Za dana grafa $G_1$ in $G_2$, je preslikava $h : V(G_1) \to V(G_2)$ *izomorfizem*, če velja:

- $h$ je bijekcija;
- $uv \in E(G_1)$ natanko tedaj, ko je $h(u)h(v) \in E(G_2)$.

V tem primeru, grafa $G_1$ in $G_2$ sta *izomorfna*, označimo $G_1 \simeq G_2$. V primeru, ko je graf $G_1$ kar enak grafu $G_2$, izomorfizmu grafov pravimo *avtomorfizem.*

Za dani graf $G$ graf, naj bo $\mathrm{Aut}(G)$ množica avtomofizmov grafa $G$.

**Trditev 9** $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ *je grupa.*

**Dokaz.**

**Naloga 2** *Izračunaj grupo avtomorfizmov za grafe* $C_3$, $P_3$, $K_n$, $K_{1,n}$, $C_4$, ...

Velja da večina grafov ima trivialno grupo automorfizmov.

**Naloga 3** *Pošči najmanjše drevo s trvialno grupo automorfizmov.*

# Tranzitivni grafi

Graf $G$ je *tranzitiven po točkah*, če za vsak par točk $u, v \in V(G)$ obstaja avtomorfizem $\pi$ ki preslika $u$ v $v$, i.e $\pi(u) = v$.

Graf $G$ je *tranzitiven po povezavah*, če za vsak par povezav $e_1, e_2 \in V(G)$ obstaja avtomorfizem $\pi$, ki preslika $e_1$ v $e_2$, i.e $\pi(e_1) = e_2$.

**Zgled:** Primeri tranzitivnih grafov $Q_3$, $C_n$, $K_n$, $P_{2,5}$

Graf $K_{a,b}$ je tranzitiven po povezavah, ni pa tranzitiven po točkah.

**Trditev 10** *Če je graf $G$ tranzitiven po povezavah in ni tranzitiven po točkah, potem je dvodelen.*

Graf $H$ je *simiteričen*, če za poljubne točke $u, v, x, y \in V(H)$ tako, da $uv, xy \in E(H)$ obstaja automorfizem $\pi$, ki preslika $u$ v $x$ in $v$ v $y$.

Graf $H$ je *razdaljno tranzitiven*, če za poljubne točke $u, v, x, y \in V(H)$ tako, da $d(u, v) = d(x, y)$ obstaja automorfizem $\pi$, ki preslika $u$ v $x$ in $v$ v $y$.

**Trditev 11** *Vsak razdaljno tranzitivni graf je simetričen in vsak simetrični graf je tranzitiven.*

# Cayleyjevi digrafi

Naj bo $H$ grupa ter $S \subseteq H$. *Cayleyjev digraf* $G = \mathrm{Cay}(H; S)$ je definiran takole:

- $V(G) = H$
- $E(G) = \{uv \mid u^{-1}v \in S\}$.

**Zgledi:** Cayleyjevi digrafi $(\mathbb{Z}_6, \{1\})$, $(\mathbb{Z}_6, \{2, 3\})$

Graf je *Cayleyjev*, če se ga da usmeriti do Cayleyjevega digrafa.

**Problem 1** *Nariši hiperkocko $Q_3$ kot Cayleyjev graf.*

**Trditev 12** *Vsak Cayleyjev graf je tranzitiven.*

Obratno ne velja. Petersenov graf je tranzitiven ni pa Cayleyjev.

# Orbite in stabilizatorji

Naj grupa $G$ deluje na $A$. Vpeljemo relacijo $\sim$ na $A$:

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \pi \in G : \pi(a) = b.$$

$\sim$ je ekvivalenčna relacija (velja refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost). Ekvivalenčnim razredom pravimo *orbite* grupe $G$ v $A$

Orbita elmenta $a \in A$ je

$$Ga := \{b \in A | \exists \pi \in G : b = \pi(a)\}$$

Permutacije, ki preslikajo $a$ v $b$:

$$G(a \to b) := \{\pi \in G | \pi(a) = b\}$$

*Stabilizator* elementa $a$ je

$$G_a := G(a \to a)$$

**Trditev 13** *Graf je tranzitiven natanko takrat, ko ima $V(G)$ eno orbito (glede $\mathrm{Aut}(G)$).*

Pri delovanju $\mathrm{Aut}(G)$ na $V(G)$ točke iz iste orbite ne moremo ločiti.

**Trditev 14** (1) *Za vsak element $a \in A$ je $G_a$ podgrupa v $G$.*

(2) *Za $\pi \in G(a \to b)$ velja $G(a \to b) = \pi \circ G_a$.*

**Dokaz.** (1) Naj bosta $\pi_1, \pi_2 \in G_a$. Dovolj bo če pokažemo

$$\pi_1^{-1} \circ \pi_2 \in G_a.$$

To pa sledi takole:

$$(\pi_1^{-1} \circ \pi_2)(a) = \pi_1^{-1}(\pi_2(a)) = \pi_1^{-1}(a) = a$$

(2) Če je $\sigma \in G_a$ potem je $(\pi \circ \sigma)(a) = \pi(\sigma(a)) = \pi(a) = b$. Torej $\pi \circ \sigma \in G(a \to b)$. Od tukaj pa sledi $G(a \to b) \supseteq \pi \circ G_a$.

Naj bo $\sigma \in G(a \to b)$. Potem, $(\pi^{-1} \circ \sigma)(a) = \pi^{-1}(\sigma(a)) = \pi^{-1}(b) = a$. Torej, $\pi^{-1} \circ \sigma \in G_a$. Zato $\sigma = \pi \circ \pi^{-1} \circ \sigma \in \pi G_a$, t.j. $G(a \to b) \subseteq \pi \circ G_a$. $\square$

Velja:

- $G(a \to b)$ odseki za podgrupo $G_a$;
- Če $b \in Ga$, potem

$$|G(a \to b)| = |G_a|,$$

  tj. vsi odseki imajo isto moč;
- Ce $b \notin Ga$, potem $|G(a \to b)| = 0$.

**Trditev 15** *Za vsak $a \in A$ velja*

$$|G| = |G_a| \cdot |Ga|.$$

**Dokaz.** Vpeljem relacijo $R_a \subseteq G \times A$ s predpisom:

$$R_a = \{(\pi, b) | \pi(a) = b\}.$$

Velja,

$$|R_a| = |G|$$

Definirajmo,

$$R_a(\pi) = \{b | \pi(a) = b\} \text{ in } R_a^{-1}(b) = \{\pi | \pi(a) = b\}$$

Potem je

$$R_a(\pi) = \{\pi(a)\} \text{ in } R_a^{-1}(b) = G(a \to b)$$

zato

$$|R_a(\pi)| = 1 \text{ in } |R_a^{-1}(b)| = |G(a \to b)|.$$

Ker velja,

$$\sum_{\pi \in G} |R_a(\pi)| = |R_a| = \sum_{\pi \in G} |R_a^{-1}(b)|$$

dobimo

$$|G| = \sum_{b \in G} |G(a \to b)| = \sum_{b \in Ga} |G(a \to b)| + \sum_{b \notin Ga} |G(a \to b)|$$

$$\sum_{b \in Ga} |G_a| + \sum_{b \notin Ga} 0 = |G_a| \cdot |Ga|.$$

$\square$

Zanima nas na koliko orbit razpade množica $A$ glede na grupo $G$, t.j. $|A/\sim|$ število ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$. Označimo to število z $N(A,G)$.

Fiksne točke permutacije $\pi$:

$$F(\pi) = \{a \in A \mid \pi(a) = a\}$$

**Izrek 16 (Burnside 1897, Frobenius 1887)** *Število orbit je*

$$N(A,G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} |F(\pi)|.$$

**Dokaz.** Podobno kot prej definiramo $R \subseteq G \times A$ s predpisom:

$$R = \{(\pi, a) | \pi(a) = a\}.$$

Velja,

$$R(\pi) = \{a | \pi(a) = a\} = F(\pi)$$

in

$$R_a^{-1}(a) = \{\pi | \pi(a) = a\}.$$

Tako dobimo

$$\sum_{\pi \in G} |F(\pi)| = \sum_{a \in A} |G_a|. \tag{1}$$

Pogledamo desno stran:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{a \in A} |G_a| &= \textstyle\sum_{Ga \in A/\sim} \sum_{b \in Ga} |G_b| \\ &= \textstyle\sum_{Ga \in A/\sim} \sum_{b \in Ga} |G_a| \\ &= \textstyle\sum_{Ga \in A/\sim} |G_a| \cdot |Ga| = |G| \cdot N(A,G) \end{aligned}$$

Upoštevajmo (1) in dobimo:

$$N(A,G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{a \in A} |G_a| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} |F(\pi)|.$$

$\square$

**Naloga 4** *Na mizi za 6 oseb sedijo 4 moški in 2 ženski. Na koliko načinov se lahko posedejo za mizo, če so enakovredni vsi načini, ki jih dobimo z zrcaljenje čez obe osi?*

**Rešitev:** Grupa, ki opisuje enakovrednost je

$$G = \{\mathrm{id}, x, y, xy\}.$$

$|A| = \binom{6}{2} = 15$ možnosti kam razporedimo ženski. Iščemo število orbit $N(A, G)$. Odgovor je 6, če pa osebe ločimo potem je odgovor $\frac{6!}{4} = 180$.

# Ciklični indeks permutacijske grupe

Naj ima permutacija $\pi \in S_n$ v zapisu $k_i$ ciklov dolžine $i$, za $i = 1, \ldots, n$. Potem pravimo, da ima $\pi$ *ciklično strukturo*

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

Velja

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 3 \cdot k_3 + \cdots + n \cdot k_n = n.$$

**Zgled:** Permutacija $(123)(45)(56)(7)(89)$ ima ciklično strukturo $(1, 3, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Vsaki permutaciji $\pi$ s ciklično strukturo $(k_1, \ldots, k_n)$ priredimo polinom

$$z(\pi) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}.$$

Polinom

$$Z(G; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} z(\pi)$$

imenujemo *ciklični indeks* grupe $G$.

Okrajšava $Z(G) := Z(G; x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

**Naloga 5** *Izračunaj ciklični indeks grupe iz prejšne naloge.*

**Rešitev:** $\mathrm{id} = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ torej $z(\mathrm{id}) = x_1^6$

$x = (16)(25)(34)$ torej $z(x) = x_2^3$

$y = (13)(2)(46)(5)$ torej $z(y) = x_1^2 x_2^2$

$xy = (14)(25)(36)$ torej $z(xy) = x_2^3$

Torej,

$$Z(G) = \frac{1}{4} \cdot (x_1^6 + 2x_2^3 + x_1^2 x_2^2).$$

**Naloga 6** *Izračunaj* $Z(A_4)$.

**Rešitev:** Sestavimo tabelo elementov grupe $A_4$ in njihovih cikličnih struktur:

| $\pi$ | cikl. strukt. | $z(\pi)$ |
|---|---|---|
| id | $(4,0,0,0)$ | ${x_1}^4$ |
| (12)(34) | $(0,2,0,0)$ | ${x_2}^2$ |
| (13)(24) | $(0,2,0,0)$ | ${x_2}^2$ |
| (14)(23) | $(0,2,0,0)$ | ${x_2}^2$ |
| (123) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |
| (132) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |
| (124) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |
| (142) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |
| (134) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |
| (143) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |
| (234) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |
| (243) | $(1,0,1,0)$ | $x_1x_3$ |

Torej,

$$Z(A_4) = \frac{1}{12} \cdot \left({x_1}^4 + 3{x_2}^2 + 8x_1x_3\right).$$

**Trditev 17** *Naj bo $G$ podgrupa v $S(A)$, ki vsebuje natanko tiste permutacije množice $A$, ki ohranjajo posamezne množice nekega razbitja $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ množice $A$. Potem,*

$$Z(G) = Z(S(A_1))\ Z(S(A_2))\ \cdots\ Z(S(A_k)).$$

**Naloga 7** *Izračunaj ciklični indeks grupe avtomorfizmov grafa $K_{2,3}$ pri njenem delovanju na*

*(a) točkah grafa;*

*(b) povezavah grafa.*

**Rešitev:** $(a)$ Grupo avtomorfizmov grafa $K_{2,3}$ sestavljajo tiste permutacije, ki ohranjajo obe množici dvodelnega razbitja grafa.

Zato je ciklični $G = \mathrm{Aut}(K_{2,3})$ pri delovanju na točkah grafa enak produktu $Z(S_2)Z(S_3)$.

$$\begin{aligned} Z(G_T) &= Z(S_2)\, Z(S_3) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) \cdot \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) \\ &= \frac{1}{12}\big({x_1}^5 + 3x_1{x_2}^2 + 2{x_1}^2x_3 + 4{x_1}^3x_2 + 2x_2x_3\big)\,. \end{aligned}$$

$(b)$ Naj bo $\{A, B\}$ ta manjša biparticija grafa $K_{2,3}$.

Permutacije, ki pribijejo točki $A$ in $B$, prispevajo k cikličnemu indeksu izraz ${x_1}^6 + 3{x_1}^2{x_2}^2 + 2{x_3}^2$.

Permutacije, ki točki $A$ in $B$ zamenjajo, prispevajo izraz ${x_2}^3 + 3{x_2}^3 + 2x_6$.

Ciklični indeks grupe avtomorfizmov grafa $K_{2,3}$ pri delovanju na povezavah je tako enak

$$Z(G_P) = \frac{1}{12}\left({x_1}^6 + 3{x_1}^2{x_2}^2 + 4{x_2}^3 + 2{x_3}^2 + 2x_6\right).$$

# Ciklični indeks nekaterih grup

- simetrična grupa $S_n$:

$$Z(S_n) = \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\cdots=n} \frac{1}{1^{\alpha_1}\alpha_1!2^{\alpha_2}\alpha_2!\cdots n^{\alpha_2}\alpha_n!} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

- ciklična grupa $C_n$:

$$Z(C_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d){x_d}^{\frac{n}{d}}.$$

- diedrska grupa $D_{2n}$:

$$Z(D_{2n}) = \begin{cases} \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\phi(d){x_d}^{\frac{n}{d}} + nx_1{x_2}^{\frac{n-1}{2}}\right) & \text{če je } n \text{ liho število.} \\ \frac{1}{2n}\left(\sum_{d|n}\phi(d){x_d}^{\frac{n}{d}} + \frac{n}{2}{x_2}^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}{x_1}^2{x_2}^{\frac{n}{2}-1}\right) & \text{če je } n \text{ sodo število.} \end{cases}$$

Spomnimo se da je $\phi(m)$ Eulerjeva funkcija in velja:

$$\begin{aligned} \phi(m) &= |\{d \mid 1 \leq d \leq m \text{ in } d \text{ tuj z } m\}| \\ \phi(ab) &= \phi(a)\cdot\phi(b) \text{ za } a \text{ in } b \text{ tuja} \\ \phi(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}) &= (p_1-1)p_1^{\alpha_1-1}\cdot(p_2-1)p_2^{\alpha_2-1}\cdots(p_l-1)p_l^{\alpha_l-1} \end{aligned}$$

## Geometrijska telesa

- *četverec:*

$$\frac{1}{12} \cdot (x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$$

- *osmerec:*

$$\frac{1}{24} \cdot (x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

- *kocka:*

$$\frac{1}{24} \cdot (x_1^8 + 6x_1^2x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2)$$

- *dvanajsterec:*

$$\frac{1}{60} \cdot (x_1^{12} + 24x_1^2x_5^2 + 15x_2^6 + 20x_3^4)$$

- *dvajseterec:*

$$\frac{1}{60} \cdot (x_1^{20} + 20x_1^2x_3^6 + 15x_2^{10} + 24x_5^4)\,.$$

## Izrek Polya in Redfielda

$A$ množica elementov, $n = |A|$

$B$ množica barv, $m = |B|$

$c : A \to B$ barvanje, $C$ množica vseh barvanj

Barvanji $c_1, c_2 \in C$ sta *enakovredni* glede na delovanje grupe $G$ na množici $A$, če

$$\exists \pi \in G : c_1 = c_2 \circ \pi \,.$$

**Trditev 18** *Enakovrednost barvanj je ekvivalenčna relacija.*

Naj bo $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ število neenakovrednih baravanj, kjer je $k_i$ elementov pobaravnih z barvo $i$ za vsak $i \in \{1, \ldots, m\}$. Številom $\lambda(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ priredimo funkcijo

$$U(A, G, B) = \sum \lambda(k_1, k_2, \ldots, k_m)\, b_1^{k_1} b_2^{k_2} \cdots b_m^{k_m} \,.$$

**Izrek 19 (Poly 1937, Redfield 1927)** *Naj bo $Z(G; x_1, \ldots, x_n)$ ciklični indeks premutacijske grupe G nad A, tedaj je*

$$U(A, G, B) = Z(G; s_1, \ldots, s_n)\,,$$

*kjer za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ velja:*

$$s_i = b_1^i + b_2^i + \cdots + b_m^i.$$

**Naloga 8** *Na koliko različnih načinov lahko z dvema barvama pobarvamo sedeže na vrtiljaku s 6 sedeži.*

**Rešitev:** Grupa, ki ustreza vrtenjem vrtljaka je $C_6$.

Velja $Z(C_6) = \frac{1}{6} \cdot (x_1^6 + 2x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6)$.

Vstavimo $x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = 2$ ter dobimo, daj je 14 takih barvanj.

**Naloga 9** *Na voljo imamo 5 rdečih, 10 zelenih, 8 modrih in 7 rumenih kroglic. Koliko različnih ogrlic lahko naredimo iz njih?*

**Rešitev:** Ogrlico lahko vrtimo oz. obrnemo zato deluje diederska grupa $D_{60}$. Ciklični indeks te grupe je

$$\frac{1}{60}(x_1^{30} + 15x_1^2x_2^{14} + 16x_2^{15} + 2x_3^{10} + 4x_5^6 2x_6^5 + 4x_{10}^3 + 8x_{15}^2 + 8x_{30}).$$

Zdaj ustavimo $x_i = b_1^i + b_2^i + b_3^i + b_4^i$ ter nas zanima koeficient pred $t_1^5 t_2^{10} t_3^8 t_4^7$, ki je

$$\frac{1}{60}\left(\binom{30}{5}\binom{25}{10}\binom{15}{8} + 15\binom{2}{1}\binom{14}{2}\binom{12}{5}\binom{7}{4}\right).$$