Povezanost grafov

Grafu G rečemo, da je **povezan**, če za vsak par točk u, v iz G obstaja pot od točke u do točke v.

Točko v grafa G imenujemo **prerezna točka**, če ima graf $G - v$ več komponent kot G.

Podobno imenujemo povezavo e grafa G **prerezna povezava** ali **most**, če z odstranitvijo te povezave dobimo graf z več komponentami, kot jih je imel prvotni graf G.

Prerezna množica povezav je množica $F \subseteq E(G)$ tako, da ima graf $G - F$ več komponent kot G.

Prerezna množica točk je množica $S \subseteq V(G)$ tako, da ima graf $G - S$ več komponent kot G.

Zgled:

Povezanost po točkah

Graf G je k**-povezan (po točkah)** (za $k \in \mathbf{N}$), če velja

- G ima vsaj $k+1$ točk, ter
- za vsako množico točk $K \subseteq V(G)$ moči $|K| < k$, je graf $G - K$ povezan.

Vprašanje 1 *Kateri so* 0*-povezani in kateri so* 1*-povezani grafi?*

Odgovor:

Vprašanje 2 *Za katere* k *je hiperkocka* Q_3 k*-povezan graf?*

Odgovor:

Največje število k, za katero je graf k-povezan, imenujemo **povezanost** grafa G in ga označimo s $\kappa(G)$.

Vprašanje 3 *Kolikšna je* $\kappa(Q_3)$*?*

Odgovor:

Lastnosti 1 *Pri k-povezanosti velja naslednje:*

(a) $\kappa(G) = 0$ *natanko tedaj, ko je G nepovezan.*

(b) *Če v k-povezanem grafu dodamo novo povezavo, graf ostane k-povezan.*

(c) *V k-povezanem grafu je vsaka točka stopnje $\geq k$.*

(d) *Če velja $k_1 \leq k_2$ in je G k_2-povezan, potem je G tudi k_1-povezan.*

Odgovor: (Trditve so manj ali več očitne.)

Problem 1 *Izračunaj $\kappa(C_n)$, $\kappa(K_n)$ ter $\kappa(K_{n,m})$.*

Rešitev:

Vprašanje 4 *Kateri je najmanjši k-povezan graf?*

Odgovor:

Trditev 2 (Dodajanje točke) *Naj bo G k-povezan graf in označimo z G' graf, ki ga konstruiramo iz grafa G tako, da mu dodamo eno novo točko y z vsaj k sosedi v G. Potem je graf G' k-povezan.*

Dokaz. Dokažimo, da mora poljubna prerezna množica točk S grafa G' imeti moč vsaj k. Recimo, da to ne drži, tj. $|S| < k$. Ločimo naslednje možnosti:

1. Če je $y \in S$, potem množica $S \setminus \{y\}$ razbije graf G. To pa ni možno, ker je graf G k-povezan.

2. Če $y \notin S$ in $N(y) \subseteq S$ (vsi sosedi točke y so vsebovani v množici S), potem je $|S| \geq k$, saj je sosedov po predpostavki vsaj k.

3. Če izključimo prvi dve možnosti, potem točka y in točke iz $N(y) \setminus S$ ležijo v eni komponenti grafa $G' - S$, ki pa ni povezan. Torej mora množica S ločiti tudi graf G. Od tukaj pa dobimo $|S| \geq k$.

$\square$

Povezanost po povezavah

Graf G je l**-povezan po povezavah** (za $l \in \mathbf{N}$), če je za vsako množico povezav $S \subseteq V(G)$ moči $|S| < l$ graf $G - S$ povezan.

Vprašanje 5 *Kateri grafi so* 0*-povezani oz.* 1*-povezani po povezava*

Odgovor:

Vprašanje 6 *Za katere l je Petersenov graf P_{10} l-povezan po povezavah?*

Odgovor:

Največje število l, za katero je graf G l-povezan po povezavah, imenujemo **povezanost po povezavah** grafa G in ga označimo z $\lambda(G)$.

Vprašanje 7 *Kolikšna je $\lambda(P_{10})$?*

Odgovor:

Opomba: Povezanost po povezavah lahko definiramo tudi takole: $\lambda(G)$ grafa G je najmanjše število povezav, brez katerih postane graf G nepovezan.

Spomnimo se, da je $\delta(G)$ minimalna stopnja grafa G.

Naloga 1 *Izračunaj* κ, λ, δ *za spodnji graf.*

Naloga 2 *Za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *poišči graf* G, *za katerega velja* $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = n$.

Trditev 3 *Za vsak povezan graf G velja*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Dokaz. Naj ima točka v stopnjo $\delta(G)$ ter naj bo F množica vseh incidenčnih povezav točke v. Graf $G - F$ je nepovezan. Torej velja $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

Pokažimo drugo neenakost. Naj bo S prerezna množica povezav moči $\lambda(G)$. Če torej odstranimo te povezave, postane graf $G-S$ nepovezan. Ampak te povezave lahko odstranimo tudi tako, da odstranimo po eno krajišče vsake od teh povezav. Pri odstranitvi točk pazimo, da ne odstranimo vseh točk bodisi v levi množici oz. v desni množici. Takšnih točk je največ $\lambda(G)$, zato velja $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

□

Bloki in 2-povezani grafi

Blok grafa G je maksimalen povezan podgraf brez prereznih točk.

Zgled:

Vprašanje 8 *Kaj so bloki v drevesu?*

Odgovor:

Trditev 4 *Vsak blok B poljubnega grafa G je*

1. *izolirana točka v G; ali*
2. *most v G; ali*
3. *maksimalen 2-povezan podgraf v G.*

Dokaz.

$\square$

Trditev 5 *Veljajo naslednje trditve:*

1. *Če je graf G povezan in nima prereznih točk, potem je sam graf G blok.*
2. *Bloki so po povezavah disjunktni, lahko pa imajo skupne točke. Te so natanko prerezne točke.*
3. *Povezava je blok natanko tedaj, ko je prerezna povezava.*
4. *K_1 ali K_2 sta edina grafa brez prereznih točk, ki nista 2-povezana.*

Dokaz.

$\square$

Trditev 6 (Opis 2-povezanih grafov) *Za graf G na vsaj treh točkah so naslednje trditve ekvivalentne:*

(a) Graf G je 2-povezan.

(b) Graf G ima samo en blok.

(c) Vsak par točk x, y grafa G leži na skupnem ciklu.

(d) Med vsakim parom točk x, y grafa G obstaja par notranje disjunktnih poti.

(e) $\delta(G) \geq 1$ in vsak par povezav grafa G leži na skupnem ciklu.

Dokaz. (Podamo le skico dokaza.)

$\square$

Izrek 7 (Ušesna dekompozicija) *Graf G je 2-povezan natanko tedaj, ko ga lahko zapišemo v obliki*

$$G = C \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k,$$

kjer je C cikel ter so $P_1, P_2, \ldots, P_k$ poti v G, pri čemer ima P_i ima $C \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_{i-1}$ skupni natanko obe svoji krajišči.

Dokaz. (Podamo le skico dokaza.)

$\square$

Zgled:

Mengerjev izrek

Naj bo G povezan graf in x, y točki v G.

(x, y)**-pot** je pot v grafu G med točkama x in y.

Dve (x, y)-poti sta **disjunktni po povezavah**, če nimata skupne povezave.

Dve (x, y)-poti sta **disjunktni po točkah**, če nimata nobene skupne točke poleg x in y.

Zgleda:

Izrek 8 (Mengerjev izrek za povezave) *Povezan graf G je k-povezan po povezavah natanko tedaj, ko je med poljubnim parom točk vsaj k po povezavah disjunktnih poti.*

Dokaz. (Naredimo dokaz le v lažjo smer.)

□

Izrek 9 (Mengerjev izrek za točke) *Povezan graf G je k-povezan po točkah natanko tedaj, ko je med poljubnim parom točk vsaj k po točkah disjunktnih poti.*

Dokaz. (Naredimo dokaz le v lažjo smer.)

□

Zgledi: