Ravninski grafi

10. marec 2008

Naloga iz osnovne šole: Dane so tri hiše ter tri drevesa na travniku. Poveži vsako hišo z vsakim drevesom s potjo, ne da bi se poti sekale.

Vprašanje 1 *Ali lahko dani graf (recimo $K_{3,3}$) narišemo v ravnini brez križanja povezav?*

Graf je **ravninski**, če se ga da narisati v ravnini brez sekanja povezav, razen v skupnih krajiščih.

Tako risanje je **ravninska vložitev** grafa G.

Zgledi:

Vložitev grafa razdeli ravnino na povezane dele, ki jim pravimo lica. Eno od teh lic je neomejeno in ga imenujemo **zunanje lice**.

Množico lic grafa G označimo z $F(G)$.

Dolžina lica f je število povezav, ki ležijo na robu lica (pri tem upoštevamo večkratnost) in jo označimo z $l(f)$.

Zgledi:

Za poljuben graf velja lema o rokovanju, za ravninske grafe pa poznamo še eno različico:

Lema o rokovanju za ravninske grafe. *Za vsak ravninski graf G velja*

$$\sum_{f \in F(G)} l(f) = 2\,|E(G)|.$$

Dokaz. Vsaka povezava grafa G meji na natanko dve lici grafa G. Če seštejemo dolžine vseh lic v grafu G, bo torej vsaka povezava šteta natanko dvakrat. Odtod sledi:

$$\sum_{f \in F(G)} l(f) = 2|E(G)|.$$

□

Eulerjeva formula

Izrek 1 (Euler) *Če ima povezan (multi)graf G n vozlišč, e povezav in f lic, potem velja*

$$n - e + f = 2. \tag{1}$$

Dokaz. Z indukcijo po številu vozlišč n. Če je $n = 1$, potem ima graf G eno vozlišče, povezave, če so, pa so zanke. Če je $e = 0$, potem je $f = 1$ in (1) drži. Z vsako dodano zanko na licu se lice razdeli na dva dela. S tem se poveča število povezav in število lic za 1. Torej tudi v tem primeru (1) velja.

Indukcijski korak za $n > 1$: Ker je G povezan, lahko najdemo povezavo, ki ni zanka. Ko tako povezavo skrčimo, dobimo ravninski graf G' z n' vozlišči, m' povezavami in f' lici. Skrčitev ne spremeni število lic, zmanjša pa se število povezav in vozlišč za 1. Torej je $n' = n-1$, $e' = e-1$, $f' = f$ in od tod sledi $n-e+f = n'+1-(e'+1)+f' = n'-e'+f' = 2$.$\square$

Zgledi:

Trditev 2 *Naj bo G ravninski graf z Ω komponentami. Pokaži, da velja:*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega.$$

Dokaz. Če ima ravninski graf G Ω komponent, potem z dodanimi $\Omega - 1$ povezavami G postane povezan graf, kateremu nismo spremenili število lic. Torej je Eulerjeva formula posplošena za ravninske grafe z Ω komponentami $n - e + f = 2 + \Omega - 1 = \Omega + 1$.

□

Posledica 3 *Vse ravninske vložitve grafa G imajo enako število lic.*

Dokaz. Trditev takoj sledi iz Eulerjeve formule.

Trditev 4 *Če je G enostaven ravninski graf z n vozlišči, e povezavami in f lici ter z vsaj tremi vozlišči, je*

$$e \leq 3n - 6.$$

Če pa je G brez trikotnikov, potem velja

$$e \leq 2n - 4.$$

Dokaz. Dovolj je pogledati za povezane grafe (drugače pa jim dodamo povezave). Če je $n \geq 3$, potem vsako lice v enostavnem grafu vsebuje najmanj 3 povezave in tako dobimo $2e \geq 3f$. Če to zdaj upoštevamo v Eulerjevi formuli, dobimo $e \leq 3n - 6$.

Če G nima trikotnikov, to pomeni, da imajo lica dolžino vsaj 4. V tem primeru pa velja $2e =\geq 4f$ in dobimo po Eulerjevi formuli $e \leq 2n - 4$.

$\square$

Vprašanje 2 *Za katere grafe imamo enačaj v prvi oz. drugi neenačbi?*

Posledica 5 *Grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska.*

Dokaz. Za K_5 imamo $e = 10 > 9 = 3n - 6$. Ker je graf $K_{3,3}$ brez trikotnikov, imamo $e = 9 > 8 = 2n - 4$. Torej imata grafa preveč povezav, da bi bila ravninska.

$\square$

Posledica 6 *Enostavni ravninski graf ima točko stopnje ≤ 5.*

Dokaz. Recimo, G je ravninski graf na n točkah, ki so vse stopnje ≥ 6. Potem velja

$$6\,n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)| \leq 6\,n - 12.$$

Dualni graf

Dualni graf G^* ravninskega grafa G je ravninski graf, ki ga dobimo tako, da:

1. v vsako lice f grafa G dodamo vozlišče $f^* \in V(G^*)$;
2. za vsako povezavo e grafa G, ki loči lici f_1 in f_2, povežemo vozlišči f_1^* in f_2^* v G^* s povezavo e^*.

Zgledi: K_4, Q_3, $K_{2,2,2}$, $K_{1,a}$

Iz same definicije ter zgornjih zgledov opazimo naslednje:

- lice velikosti k grafa G ustreza točki stopnje k grafa G^*;
- točka stopnje k grafa G ustreza licu grafa G^*;
- povezava grafa G ustreza povezavi grafa G^*;
- zanka v G ustreza mostu v G^*;
- most v G ustreza zanki v G^*;
- cikel grafa G ustreza minimalnemu prerezu grafa G^*;
- minimalni prerez grafa G ustreza ciklu grafa G^*.

Trditev 7 *Naj bo G povezan ravninski graf z v točkami, e povezavami in f lici. Potem ima njegov dualni graf G^* f točk, e povezav in v lic.*

Dokaz. Trditev sledi hitro iz prejšnih opazk.

$\square$

Problem 1 *Naj bo G^* dual grafa G. Poišči dual grafa G^*.*

Rešitev:

Opomba: Različne vložitve grafa G v ravnino lahko določajo različne dualne grafe.

Preverjanje ravninskosti

Graf H je **minor** grafa G, če ga lahko konstruiramo iz nekega podgrafa grafa G z zaporedjem skrčitev povezav. Pravimo, da je graf G **skrčljiv** na graf H.

Zgledi:

Graf H je **subdivizija** grafa G, če ga lahko konstruiramo iz grafa G, tako da nekatere povezave v G nadomestimo s potmi dolžine 2 ali več.

Zgledi:

Trditev 8 *Če graf G vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$, potem G ni ravninski graf.*

Dokaz. Ker K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska grafa.

□

Trditev 9 *Če graf G vsebuje K_5 ali $K_{3,3}$ kot minor, potem G ni ravninski graf.*

Dokaz. Ker K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska grafa.

□

Velja namreč tudi obrat, kar sta prva dokazala Kuratowski ter Wagner:

Izrek 10 (Wagner) *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje grafa K_5 in $K_{3,3}$ kot minorja.*

Izrek 11 (Kuratowski) *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizij grafov K_5 ali $K_{3,3}$.*

Zgledi:

Posledica 12 *Obstaja algoritem, ki v linearnem številu korakov ugotovi ali je dani graf ravninski.*

Posledica 13 (Stein-Tutte) *Vsak 3-povezan ravninski graf ima ravnočrtno, konveksno vložitev v ravnino.*

Zgledi:

Debelina grafa

Najmanjše število ravninskih grafov, iz katerega lahko sestavimo graf G, je **debelina** grafa G in jo označimo s $t(G)$.

Zgledi:

Velja: $t(G) = 1$ natanko takrat, ko je G ravninski.

Opomba: Zanke in vzporedne povezave niso pomembne pri debelini grafa $t(G)$. Zato se omejimo na enostavne grafe.

Spodnja meja za $t(G)$

Ni znana formula za $t(G)$. Enostavno pa se da izračunati spodnjo mejo, ki je zelo pogosto tudi prava.

Izrek 14 *Naj bo G enostaven povezan graf z n točkami in m povezavami. Potem je*

(a) $t(G) \geq \lceil \frac{m}{3n-6} \rceil$;

(b) Če je G brez trikotnikov, potem je $t(G) \geq \lceil \frac{m}{2n-4} \rceil$.

Dokaz. (a) Ker ima ravninski graf $\leq 3n-6$ povezav, rabimo vsaj $\frac{m}{3n-6}$ kosov. Trditev (b) pokažemo podobno.

□

Vprašanje 3 *Kakšne spodnje meje nam zagotovi Izrek 14 za grafe K_5, $K_{3,3}$, P_{10}, K_6.*

Odgovor:

Problem 2 *Kakšne spodnje meje nam zagotovi izrek 14 za grafa* K_n, $K_{a,b}$.

Rešitev:

Formula za $t(K_{a,b})$ ni znana, za K_n pa velja naslednji izrek.

Izrek 15 *Debelina polnega grafa* K_n *je določena z obrazcem:*

$$t(K_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor, & \textit{za } n \neq 9, 10; \\ 3, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Križno število

Križno število $\mathrm{cr}(G)$ grafa G je najmanjše možno število križanj, če G narišemo v ravnini.

Zgledi:

Velja: $\mathrm{cr}(G) = 0$ natanko takrat, ko je G ravninski.

Opomba: Če se dve povezavi sekata več kot enkrat, se ju da prestaviti tako, da zmanjšamo število presečišč na eno ali nič.

Trditev 16 *Vsak graf se da vedno narisati v ravnini tako, da se poljubni dve povezavi sekata največ enkrat.*

Izrek 17 *Za polni graf K_n velja* $\mathrm{cr}(K_n) \geq \frac{1}{5}\binom{n}{4}$.

Problem 3 *Izračunaj* $\mathrm{cr}(K_6)$.