Turnirji

Turnir T je digraf, katerega temeljni graf je poln graf.

Zgled:

Motivacija: Iz športnih turnirjev, kjer vsak igralec igra z vsakim ter neodločen izid ni možen, recimo tenis. Usmerjena povezava $a \to b$ v turnirju pomeni, da igralec a **premaga** igralca b.

Naloga 1 (a) *Poišči vse turnirje na dveh oz. treh točkah.*

(b) *Poišči vse turnirje z dvema oz. tremi udeleženci (udeležence ločimo, točk pa ne).*

Trditev 1 *Število turnirjev z n udeleženci je* $2^{\binom{n}{2}}$.

Dokaz. Ker ima temeljni graf turnirja na n točkah $\binom{n}{2}$ povezav in vsako tako povezavo lahko usmerimo na dva načina.

$\square$

Izhodna stopnja $d^+(a)$ pomeni **število zmag** igralca a.

Vhodna stopnja $d^-(a)$ pomeni **število porazov** igralca a.

Če je $d^-(a) = 0$, potem je igralec a **zmagovalec** turnirja.

Če je $d^+(a) = 0$, potem je igralec a **poraženec** turnirja.

Naloga 2 *Pokaži, da ima turnir lahko največ enega zmagovalca in največ enega poraženca.*

Tranzitivni turnirji

Turnir T je **tranzitiven**, če za poljubno trojico točk a, b, c velja pogoj: če sta ab in bc usmerjeni povezavi v T, potem je tudi ac usmerjena povezava v T.

Pogoj tranzitivnosti krajše zapišemo takole:

$$\forall\, a, b, c \in V(T) : a \to b \;\text{ in }\; b \to c \Rightarrow \; a \to c \tag{1}$$

Zgled:

Trditev 2 *Turnir T je tranzitiven natanko takrat, ko ne vsebuje nobenega cikla.*

Dokaz. ($\Leftarrow$). Recimo $a \to b$ in $b \to c$. Ker T ne vsebuje ciklov, v T ni povezave $c \to a$. Torej, povezava $a \to c$ je v T. Tako smo pokazali tranzitivni pogoj (1).
($\Rightarrow$). Recimo, da je $a_1 a_2 \cdots a_n a_1$ cikel v T. Torej $a_n \to a_1$. Ker $a_1 \to a_2$ in $a_2 \to a_3$ sledi $a_1 \to a_3$. Podobno iz $a_1 \to a_3$ in $a_3 \to a_4$ sledi $a_1 \to a_4$. Podobno pokažemo, da a_1 premaga $a_4, a_5, \ldots,$ ter a_n. A to je protislovje, ker $a_n \to a_1$.

$\square$

Trditev 3 *V tranzitivnem turnirju T zmeraj obstajata zmagovalec in poraženec.*

Dokaz. Recimo, da v T nimamo poraženca. Potem gre iz vsake točke $a \in V(T)$ vsaj ena povezava ven, tj. $\delta^+(G) \geq 1$. Zdaj pa po Lemi + sklepamo, da T vsebuje usmerjen cikel. To pa je v protislovju s prejšno trditvijo.

□

Lestvica je razvrstitev $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vseh udeležence turnirja T po nekem kriteriju.

Trditev 4 *Naj bo T tranzitiven turnir z n udeleženci. Potem obstaja lestvica $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tako, da X_i premaga vse udeležence, ki mu sledijo na lestvici.*

Dokaz. Po prejšnji trditvi v T obstaja zmagovalec turnirja. Označimo tega udeleženca z X_1.

Zdaj pa obravnavamo turnir $T-X_1$. Ta je tudi tranzitiven, zaradi tega ima zmagovalca, recimo to je X_2.

Potem obravnavamo turnir $T-X_1-X_2$, pa naj bo X_3 zmagovalec tega turnirja. Postopek ponovimo na $T - X_1 - X_2 - X_3$ in tako naprej.

Na ta način zgeneriramo lestvico $X_1, X_2, \ldots, X_n$ za katero velja, da X_i premaga vse udeležence, ki mu sledijo na lestvici.

□

Naloga 3 *Koliko je tranzitivnih turnirjev na n točkah? Koliko pa z n udeleženci?*

Problem 1 *Ali vedno obstaja lestvica tako, da je vsak udeleženec premagal tistega, ki mu na tej lestvici neposredno sledi.*

Izrek 5 *Vsak turnir ima usmerjeno Hamiltonovo pot.*

Dokaz. Z indukcijo po številu točk n. Izrek očitno velja za $n = 1$. Predpostavimo, da tudi velja za vsak turnir na n točkah. Pokažimo v nekaj korakih, da velja tudi za poljubni turnir T na $n+1$ točkah $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

1. Odstranimo točko a_{n+1} iz turnirja in tako dobimo turnir $T^* = T - a_{n+1}$ na n točkah. Po indukcijski predpostavki izrek velja za T^*. Torej obstaja usmerjena Hamiltonova pot v T^*, recimo $H = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$.

2. Zdaj točko a_{n+1} vključimo v H tako, da dobimo Hamiltonovo pot v T. Če bi obstajala usmerjena povezava $a_{n+1} \to a_1$, bi imeli Hamiltonovo pot $a_{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n$. Zato predpostavimo, da v T obstaja usmerjena povezava $a_1 \to a_{n+1}$.

3. Če bi obstajala povezava $a_{n+1} \to a_2$ v T, bi imeli usmerjeno Hamiltonovo pot $a_1 a_{n+1} a_2 a_3 \cdots a_n$. Zato predpostavimo, da v T obstaja usmerjena povezava $a_2 \to a_{n+1}$.

4. Podobno sklepamo, da v T obstajajo povezave $a_{n+1} \to a_3$, $a_{n+1} \to a_4$, $\cdots$, $a_{n+1} \to a_n$. Od tod pa takoj dobimo, da je $a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$ Hamiltonova pot v T. □

Tepena (oz. **poražena**) **skupina** S turnirja T je podmnožica udeležencev, ki so izgubile vse tekme z vsemi udeleženci iz $T \setminus S$. V tem primeru rečemo, da je $T \setminus S$ **zmagovalna skupina**.

Množica povezav med S in $T \setminus S$ je **usmerjen prerez**.

Zgled:

Turnir T je **nerazcepen**, če nima usmerjenih prerezov (oz. nima tepene skupine), sicer je **razcepen**.

Naloga 4 *Pokaži, da v nerazcepnem turnirju nimamo niti zmagovalca niti poraženca.*

Naloga 5 *Ali obstaja turnir, ki je hkrati nerazcepen in tranzitiven?*

Izrek 6 *Turnir T je Hamiltonov natanko takrat, ko je nerazcepen.*

Dokaz. ($\Rightarrow$): Če je T razcepen, potem obstaja tepena skupina A v T. Iz množice A ne moremo priti v zmagovalno skupino B, saj iz množice A ne obstaja nobena povezava, ki bi bila usmerjena navzven iz te množice. Torej ne obstaja usmerjen Hamiltonov cikel v T.

($\Leftarrow$): Naj bo T nerazcepen. Dokaza se lotimo s protislovjem, t.j. predpostavimo, da turnir T ni Hamiltonov.

Trdimo: *Za vsako točko $a \in V(T)$ velja $d^+(a) > 0$.* Sicer, če bi obstajala točka a, za katero to ne velja, potem bi bila množica $\{a\}$ tepena.

Zdaj, po Lemi + sledi, da v T obstaja usmerjen cikel. Naj bo $C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ najdaljši usmerjen cikel v T. Če bi bil C Hamiltonov, bi prišli do protislovja in tako bi bil izrek že dokazan. Zato predpostavimo, da obstajajo točke turnirja T, ki niso v C.

Te točke razdelimo v tri skupine:

- A_1 - udeleženci, ki so z nekaterimi udeleženci cikla C zmagali, z nekaterimi pa izgubili.
- A_2 - udeleženci, ki so premagali vse iz C.
- A_3 - udeleženci, ki so izgubili z vsemi iz C.

Ker C ni Hamiltonov, sledi $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq \emptyset$.

Trdimo: A_1 *je prazna množica.* Sicer obstaja $a_1 \in A_1$. Lahko najdemo dve sosednji točki $v_i \in C$ in $v_{i+1} \in C$ tako, da obstajata usmerjeni povezavi $v_i a_1$ in $a_1 v_{i+1}$. Tako dobimo usmerjen cikel $C' = v_1 v_2 \cdots v_i a v_{i+1} \cdots v_n v_1$, ki je daljši od C, to pa je protislovje.

Trdimo: $A_2 = \emptyset \Leftrightarrow A_3 = \emptyset$. Če je $A_2 = \emptyset$, je A_3 tepena skupina. To je v nasprotju s predpostavko, da je T nerazcepen, zato je tudi $A_3 = \emptyset$. Če je $A_3 = \emptyset$, je A_2 zmagovalna skupina. Ker je T nerazcepen, je to protislovje.

Ker $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq \emptyset$, tudi A_2 in A_3 ne bosta prazni (saj smo že ugotovili, da je A_1 prazna). Torej, obstajata $a_2 \in A_2$ in $a_3 \in A_3$ tako, da a_3 premaga a_2 (Če to ne bi držalo, bi bila A_3 tepena skupina). Sedaj razširimo C na $C^+ = v_1 v_2 \cdots v_i a_3 a_2 v_{i+1} \cdots v_n v_1$.

Dobili smo usmerjen cikel C^+, ki je daljši od cikla C. Prišli smo v protislovje, torej je C usmerjen Hamiltonov cikel v T. Tako sklepamo, da je T Hamiltonov. $\square$