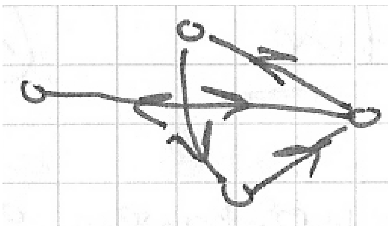
Usmerjeni grafi (digrafi)




Izhodna stopnja $d^+(x)$ pomeni število povezav **iz** x.

Vhodna stopnja $d^-(x)$ pomeni število povezav **v** x.

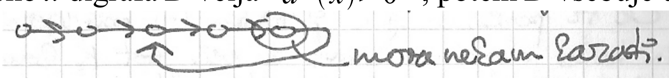
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E|$$

$$\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = |E| = \sum_{v \in V(G)} d^-(v)$$

Usmerjena pot $\vec{P}_n$: 

Usmerjen cikel $\vec{C}_n$: 

Trditev: Če za vsako točko x digrafa D velja $d^+(x) > 0$, potem D vsebuje usmerjen cikel.



Temeljni graf G za digraf D dobimo tako, da povezavam iz D odstranimo usmeritve.

Definiciji:

- Digraf D je **povezan**, če je njegov temeljni graf povezan.
- Digraf D je **krepko povezan**, če v D obstaja usmerjena pot med poljubnim urejenim parom točk.

Vprašanje: Naj so v grafu G vse točke sode. Usmeri G tako, da za D velja $\forall\, v \in D : d^+(v) = d^-(v)$.
Odgovor: Eulerjev obhod.

Definiciji:

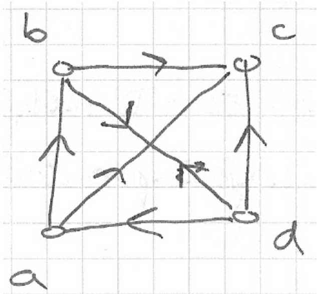
- Usmerjen **sprehod/obhod** je **Eulerjev**, če vsebuje vse povezave digrafa D.
- **Digraf** D je **Eulerjev**, če obstaja Eulerjev obhod.

Izrek: Naj bo D povezan digraf. Potem velja:

1. D ima Eulerjev obhod ntk. $\forall v \in V : d^+ = d^-$.
2. D ima Eulerjev sprehod ntk.
   $\exists x, y : d^+(x) = d^-(x) + 1, d^-(y) = d^+(y) + 1 \ \wedge \ \forall v \in D \setminus \{x, y\} : d^+(v) = d^-(v)$

Diracov ***izrek***: Naj bo D enostaven digraf na n točkah če velja $\forall v \in V : \left(d^+(v) \geq \frac{n}{2} \ \wedge \ d^-(v) \geq \frac{n}{2} \right)$

Turnirji



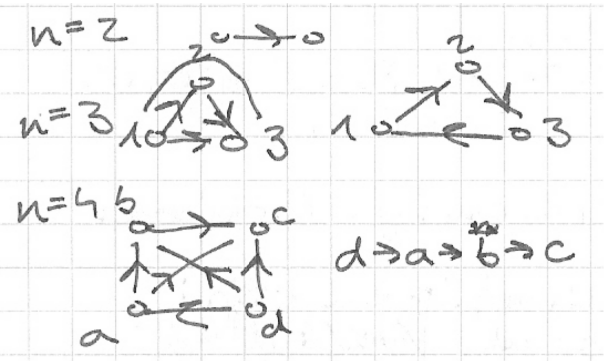
Usmerjenost: $a \to b \ \sim \ a$ je premagal b

$d^+(x) =$število zmag $\quad d^-(x) =$število porazov

Število turnirjev za n igralcev:

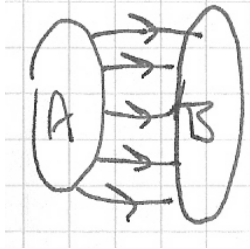
$2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Problem: Poišči lestvico tako, da je vsak tekmovalec premagal tistega, ki mu neposredno sledi.



Izrek: Vsak turnir ima Hamiltonovo pot.

Naj izrek velja za n. Naj bo T turnir na n+1 točkah. $T - x_{n-1}$ je turnir na n točkah, zato ima Hamiltonovo pot.



Usmerjen prerez.

Če ima D **usmerjen prerez**, D ne vsebuje Hamiltonovega cikla.

Definicija: D je **nerazcepen**, če nima usmerjenih prerezov.

Izrek: Če je D nerazcepen, ima Hamiltonov cikel.

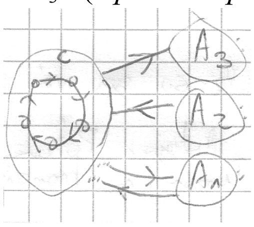
Nerazcepni turnirji

Če je turnir T Hamiltonski (imamo Hamiltonov usmerjen cikel), potem T ni razcepen (nima usmerjenih prerezov).

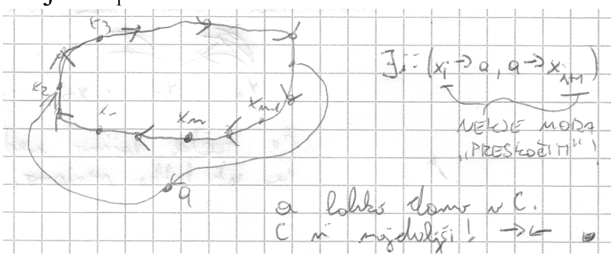
Izrek: Vsak nerazcepni turnir dopušča (ima) Hamiltonov cikel.

Dokaz: Cikel zagotovo obstaja (saj velja $\forall v : d^{+}(v) > 0$). Naj bo C najdaljši cikel v nerazcepnem turnirju T.

- Lahko velja $V(C) = V(T)$. Imamo Hamiltonov cikel.
- Lahko $V(T) \setminus V(C)$ razdelimo na skupine A_1 (*nevtralna skupina*), A_2 (*zmagovalci*) in A_3 (*tepena skupina*) glede na C.



  - Velja $A_1 = \emptyset$:

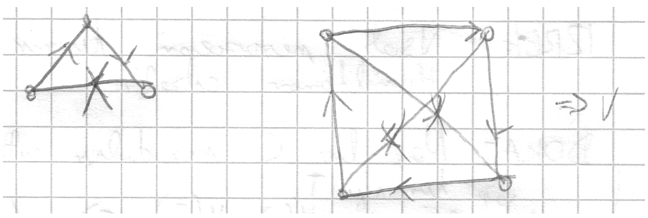


  - Velja $A_2 = \emptyset \Leftrightarrow A_3 = \emptyset$, saj T nima usmerjenega prereza.
  - Velja $A_2 = A_3 = \emptyset$: Recimo, da $A_2 \neq \emptyset,\ A_3 \neq \emptyset$.
    (slika)
    $\exists a \in A_3,\ b \in A_2 : a \rightarrow b$. C ni najdaljši. Prišli smo v protislovje. Konec dokaza.
  - Velja torej $A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset$; cikel C je Hamiltonov.

Tranzitivni turnirji

Turnir je **tranitiven**, če velja: $\forall (x, y, z \in V) : (x \rightarrow y \wedge y \rightarrow z \Rightarrow x \rightarrow z)$.

Trditev: Turnir je tranzitiven natanko takrat, ko je brez usmerjenih ciklov:



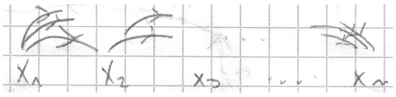
Če ni tranzitiven, ima takoj 3-cikel!

Trditev: Obstaja nekdo, ki so ga vsi premagali.

Recimo, da ne obstaja. Potem $\forall v \in V(T) : d^{+}(v) > 0$. Imamo cikel in zato turnir ni tranzitiven.

Prišli smo v protislovje. Konec dokaza.

Tranzitiven turnir nam da linearno ureditev:

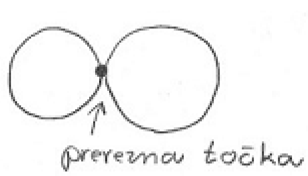


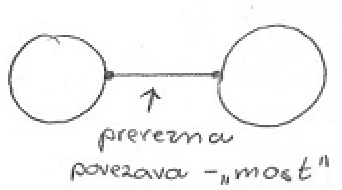
Če točke ločimo med seboj, imamo na *n* točkah $n!$ možnih turnirjev. Če točke lahko poljubne menjavamo, obstaja le ena možnost.

Povezanost grafov

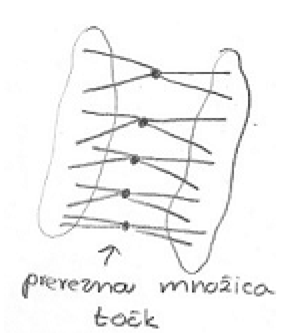
Če iz grafa odstranimo **prerezno točko**, ta razpade na več komponent.

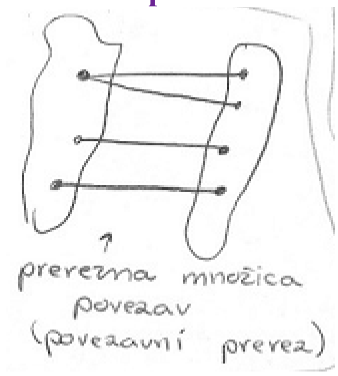
Če iz grafa odstranimo **prerezno povezavo** (**most**), ta razpade na dve komponenti. (Mimogrede: v drevesih je vsaka povezava most.)





Podobno definiramo **prerezno množico točk** in **prerezno množico povezav** (**povezavni prerez**).





Definicija: Povezan graf *G* je **po točkah *k*-povezan**, če velja:

1. *G* ima vsaj *k*+1 točk in
2. za vsako množico točk $U \subseteq V(G)$ moči $|U| < k$ je graf $G - U$ povezan (t.j., vsak točkovni prerez ima vsaj *k* točk).

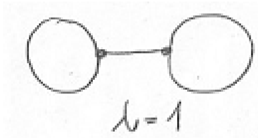
Če velja $k_1 \leq k_2$ in je *G* k_2-povezan, je *G* tudi k_1-povezan.

Točkovna povezanost grafa *G*, označimo $K(G)$ (t.j. kappa(*G*)), je največje tako število *k*, da je *G* *k*-povezan.

Povezanost po povezavah $\lambda(G)$ povezanega grafa *G* je najmanjše število povezav, brez katerih graf razpade.

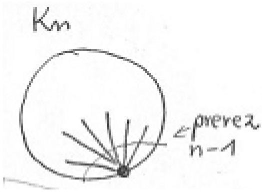
Zgledi:

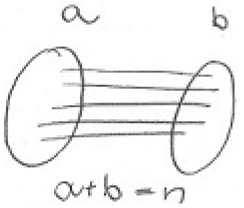
- Če ima graf most, je $\lambda(G)=1$.



- Izračunaj $K(K_n)$, $\lambda(K_n)$.
  $K(K_n)=n-1$
  $\lambda(K_n)=n-1$

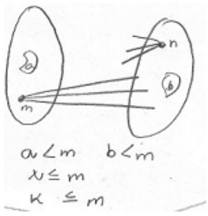
Ali je res $\lambda(K_n)=n-1$?





Recimo, da imamo prerez z močjo manj kot n-1. Najmanjše število povezav med dvema komponentama je n-1 (tako, da eno komponento sestavlja le 1 točka), zato je to najmanjši prerez.

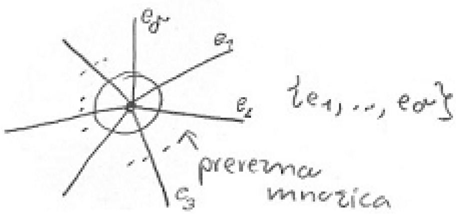
- Izračunaj $K(K_{n,m})$, $\lambda(K_{n,m})$.
  $K(K_{n_m})=\lambda(K_{n_m})=min(\{n, m\})$



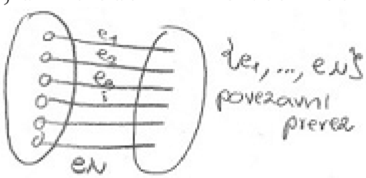
Trditev: Za vsak G velja: $K(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$.

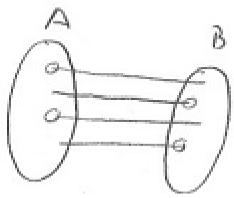
Dokaz:

- $\lambda<\delta$: naj bo v točka z najmanjšo stopnjo: $d(v)=\delta(G)$. Njene povezave $\{e_1, e_2, \ldots, e_\delta\}$ tvorijo prerezno množico.



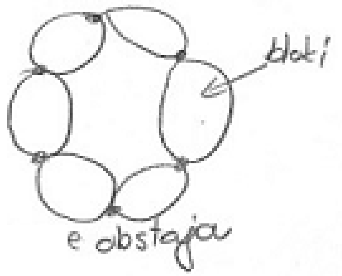
- $K\leq\lambda$: Izberimo najmanjši povezavni prerez. Točkovni prerez predstavlja množica točk, v katero damo po eno krajišče vsake povezave povezavnega prereza (pri tem moramo paziti le, da ne odstranimo vseh točk ene komponente).





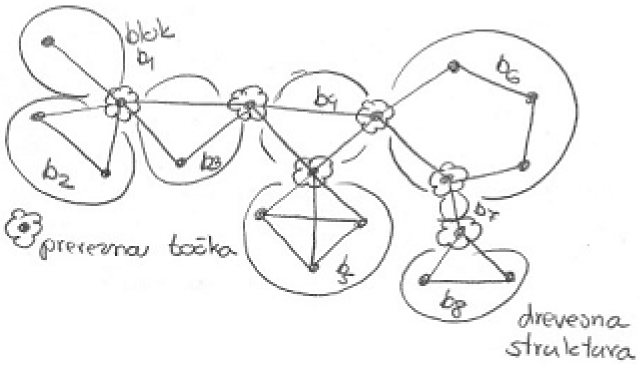
Bloki in 2-povezanost (po točkah)

Definicija: Graf G je 2-povezan, če je število točk vsaj 3 in ni prereznih točk.



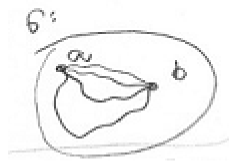
ne morejo tvoriti take ure; vedno tvorijo drevo!

Definicija: **Blok** v G-ju je maksimalen povezan podgraf brez prereznih točk.



Trditev (opis 2-povezanih grafov): Naj bo G graf na vsaj treh točkah. Naslednje trditve so enakovredne:

1. G je 2-povezan.
2. G ima samo en blok.
3. Vsak par točk grafa G leži na skupnem cilku.
4. $\delta(G) \geq 1$, vsak par povezav leži na skupnem ciklu.



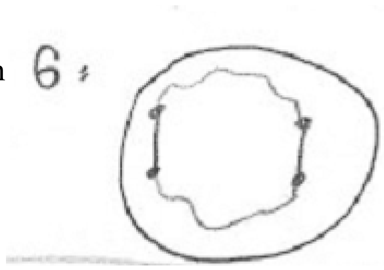
(3)

Dokaz $3 \Rightarrow 1$:

Naj graf ne bo 2-povezan (torej vsebuje prerezno točko). V takem grafu ne moremo najti cikla z nekaterimi točkami.

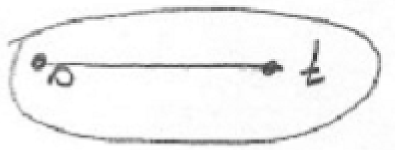
Podobno pokažemo $4 \Rightarrow 1$.

Ostali dokazi so manj preprosti :-).

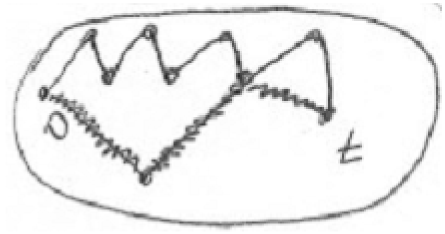


Definicije:

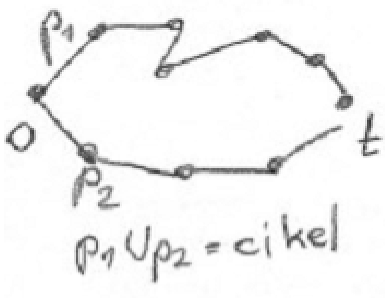
- Naj bo G je povezan graf in $s, t \in V(G)$. ***s,t*-pot** je pot med s in t.



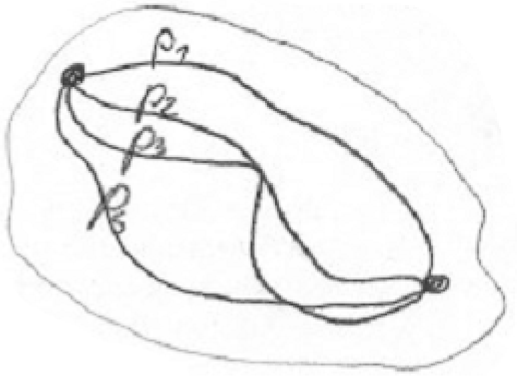
- Dve s,t-poti sta **po povezavah disjunktni**, če nimata skupne povezave.



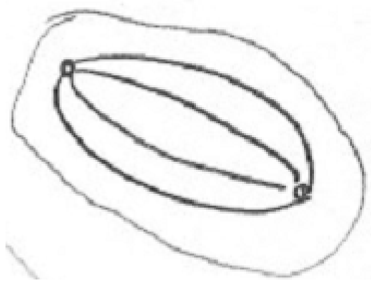
- Dve s,t-poti sta **po točkah disjunktni**, če nimata skupnih točk, razen krajišč s in t. Taki dve poti tvorita cikel.



Mengerjev ***izrek*** (za **povezave**): Povezani graf G je po *povezavah* k-povezan natanko takrat, ko je med poljubnim parom točk vsaj k v *povezavah* disjunktnih poti.

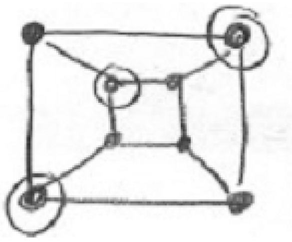


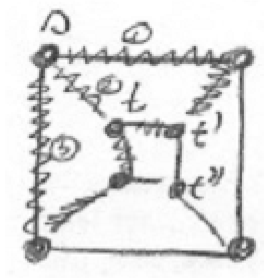
Mengerjev ***izrek*** (za **točke**): Povezan graf G je po *točkah* k-povezan natanko takrat, ko je med poljubnim parom točk vsaj k v *točkah* disjunktnih poti.



Zgled: $K(Q_3), \lambda(Q_3)$.
$\delta=3, \ K=3 \ \Rightarrow \ \lambda=3$

DN: Poskusi še s kakšnim d

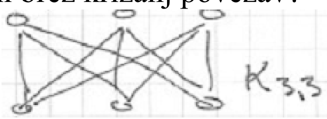




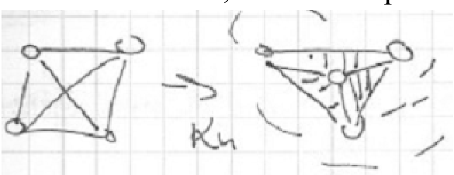
Tri po točkah disjunktne povezave med dvema točkama.

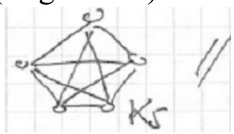
Ravninski grafi

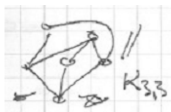
Ali lahko dani graf narišemo v ravnini brez križanj povezav?



Definicija: Graf G je **ravninski** (**planarni**), če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne sekata, razen v skupnem krajišču (če ga imata).

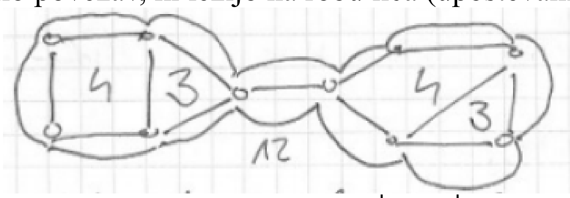






Definicije:

- Vložitev grafa razdeli navnino na posamezne dele, ki jim pravimo **lica**.
- Eno od teh lic je neomejeno in ga imenujemo **zunanje lice** (**neskončno lice**).
- **Množico lic** grafa označimo z $F(G)$.
- **Dolžina lica** je število povezav, ki ležijo na robu lica (upoštevamo večkratnost).



Naj bo f_i število lic dolžine *i*. Potem velja $\sum_{i\geq 1} i\cdot f_i=2\cdot|E(G)|$.

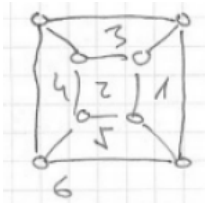
Z $l(f)$ označimo dolžino lica *f*. Velja $\sum_{f\in F(G)} l(f)=2\cdot|E(G)|$.

Eulerjeva formula

Naj bo *G* povezan ravninski multigraf, vložen v ravnino. Potem velja:
$|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$.

To zapišemo tudi kot $v-e+f=2$.

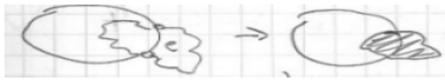
$v=8$
$e=10$
$f=6$
$8-12+6=2$



Trditev: Število lic je neodvisno od izbrane vložitve.

Dokaz: Z indukcijo po številu povezav e. Naj bo G ravninski graf, vložen v ravnino, z e+1 povezavami. Obstajata dve možnosti:

- G ima točko a s stopnjo 1. Označimo $G' = G - a$.



$$v'-e'+f'=v-1-(e-1)+f=v-e+f \quad .$$

- G nima točke s stopnjo 1. Potem ima G cikel. Naj bo e povezava na tem ciklu. Ta je na robu dveh lic.
  $G'\colon\; v'=v,\; e'=e-1,\; f'=f-1$
  $v-(e-1)+(f-1)=v-e+f$

Posledica: G je ravninski graf. Velja. $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=1+\text{št. komponent}$.

Trditev: Za ravninski graf G z vsaj 2 povezavami velja:

1. $3f\leq 2e$
2. $e\leq 3v-6$ (ravninski grafi imajo *malo* povezav)

Dokaz: Ker ima G vsaj dve povezavi, je vsako lice dožine vsaj 3.

1. $2e=\sum_{i\geq 0} i\cdot f_i=\sum_{i\geq 3} i\cdot f_i\geq 3\sum_{i\leq 3} f_i=3f$
2. $v-e+f=2$ $\qquad 3\mathrm{f}\leq 2e;\; f\leq\frac{2e}{3}$

   $v-e+\frac{2}{3}e\geq 2$

   $v-\frac{1}{3}e\geq 2;\; e\leq 3\mathrm{v}-6$

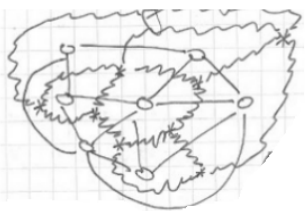
Zgled: $K_5\colon\; v=5,\, e=10;\; 10\leq 15-6 \;\Rightarrow\; 10\leq 9$ - ni ravninski!

Trditev: Če je graf G brez trikotnikov (vsak cikel je dolžine vsaj 4), potem $f\leq\frac{e}{2}$ in $e\leq 2v-4$.

Dokaz je podoben kot zgoraj (namesto 3 vstavimo 4).

Zgled: $K_{3,3}\colon\; v=6,\, e=9;\; e\leq 2v-4\Rightarrow 9\leq 8$ - ni ravninski!

Dual grafa



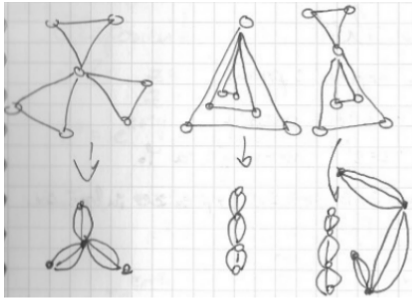
Označimo: G^* .

Velja: $(G^*)^*=G$, $e=e^*$, $v=f^*$, $f=v^*$.

Povezanemu grafu G definiramo dualni graf G^* v treh korakih:

1. Naredimo ravninsko risbo grafa G.

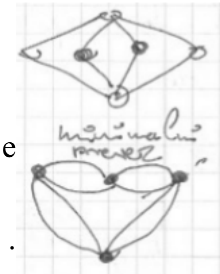
2. Izberemo po eno točko v notranjosti vsakega lica – te točke postanejo točke grafa G^* .
3. Za vsako povezavo *e* grafa *G* povežemo točki, ki sta v licih na obeh straneh povezave *e*.



Različne vložitve grafa *G* v ravnini lahko določajo različne dualne grafe G^* . Vsak povezan ravninski graf je dual nekega drugega ravninskega grafa.

Dualni koncept

G	G^*
točka	lice
most	zanka
cikel	minimalni prerez



Trditev: Minimalna stopnja ravninskega grafa je največ 5: G ravninski $\Rightarrow \delta\leq 5$.

Recimo za $x\in V(G): d(x)\geq 6$.

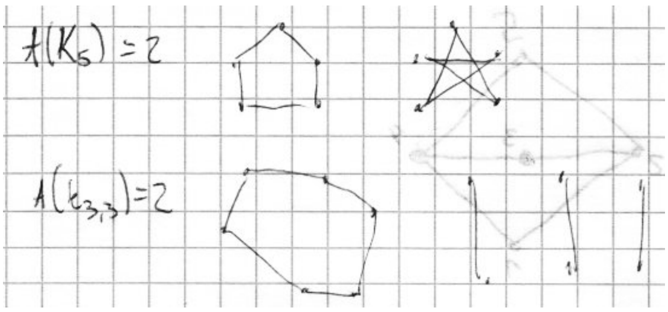
$2e=\sum_{v\in V(G)} d\,v\geq 6\cdot v$. $e\geq 3v$. $3v-6\geq e\geq 3v$.

Prišli smo v protislovje.

Debelina grafa

Debelina grafa *G* je najmanjše število ravninskih grafov, iz katerih lahko sestavimo graf *G* in jo označimo s $t(G)$.

Opomba: Če je graf ravninski, velja $t(G)=1$, sicer $t(G)>1$.



Opomba: Ni znana formula za $t(G)$. Enostavno pa se da izračunati *„spodnjo mejo"* za $t(G)$, ki je zelo pogosto tudi prava debelina.

Opomba: Zanke in vzporedne povezave niso pomembne pri $t(G)$ - lahko se omejimo na enostavne grafe.

Izrek: Naj bo *G* enostaven povezan graf z *n* točkami in *m* povezavami. Potem je:

- $t(G)\geq\left\lceil \frac{m}{3n-6}\right\rceil$,

- če je G brez trikotnikov, pa $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{2n-4} \right\rceil$.

Dokaz: Ker ima ravninski graf največ $3n$-6 povezav, rabimo vsaj $\frac{m}{3n-6}$ kosov. Če nimamo trikotnikov, potrebujemo $\frac{m}{3\text{n}-4}$ kosov.

Zgled: K_n . $\frac{n(n-1)}{2}$ povezav. (opomba: velja zveza $\left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+y-1}{y} \right\rfloor$)

$$t(K_n) = \left\lceil \frac{n(n-1):2}{3\text{n}-6} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(n-1)}{2(3\text{n}-6)} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(n-1)+2(3\text{n}-6)-1}{2(3\text{n}-6)} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n^2+5\text{n}-14}{2(3\text{n}-6)} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(n+7)(n-2)}{6(n-2)} \right\rfloor =$$
$$= \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor$$

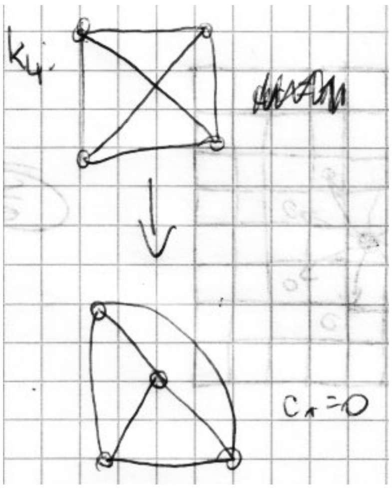
Izrek: Velja $t(K_n) = \begin{cases} 3 & n=9,10 \\ \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor & n \neq 9,10 \end{cases}$.

Primer: $K_{r,s}$. $m = r \cdot s$, $n = r+s$. Torej $t(K_{r,s}) \geq \left\lceil \frac{r-s}{2r+2s-4} \right\rceil$. Opomba: Natančna meja ni znana.

Število križanj

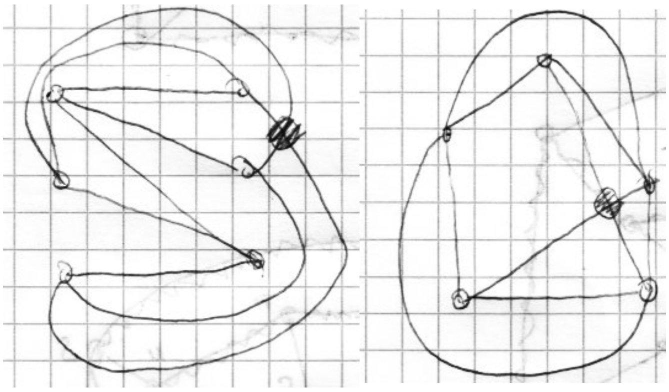
Definicija: **Število križanj** grafa G, označimo $\text{cr}(G)$, je najmanjše možno število križanj, če G narišemo v ravnini.

Zgled:



Opomba: $\text{cr}(G)=0$ za ravninske grafe G.

$\text{cr}(K_5)=1$, $\text{cr}(K_{3,3})=1$.



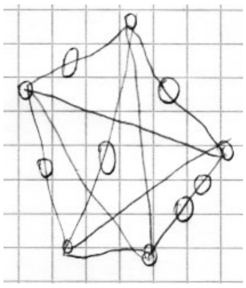
Trditev: $\mathrm{cr}(K_6)=3$. 15 povezav ... Nariši s 3 križanji (DN). Maksimalni ravninski podgraf v K_6 ima $3\cdot 6-6=12$ povezav. Vsaka od ostalih seka kakšno drugo. Zato $\mathrm{cr}(K_6)\geq 3$.

Izrek (Guj, 72): $\mathrm{cr}(K_n)\geq\frac{1}{5}\binom{n}{4}$.

Izrek Kuratowskega

Če v grafu *H* nekatere povezave nadomestimo s potmi, ki vežejo iste pare točk, dobimo graf, ki mu pravimo **subdivizija grafa *H***.

Subdivizija grafa K_5 :



Posledica: Če graf *G* vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$ kot podgraf, potem ni ravninski.

Izrek: Graf *G* je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa izomorfnega subdiviziji K_5 ali $K_{3,3}$.

H je **Minor grafa** *G*, če odstranjujemo točke ali povezave, ali pa skrčimo povezave *G*-ja. **Skrčitev povezave** pomeni identifikacijo njenih krajišč. Potem odstranimo nastalo zanko in vzporedne povezave. Graf je ravninski tudi ntk. ne vsebuje *minorjev* grafa K_5 ali $K_{3,3}$.

DN: Poišči K_5 kot minor Petersenovega grafa.

Definiciji:

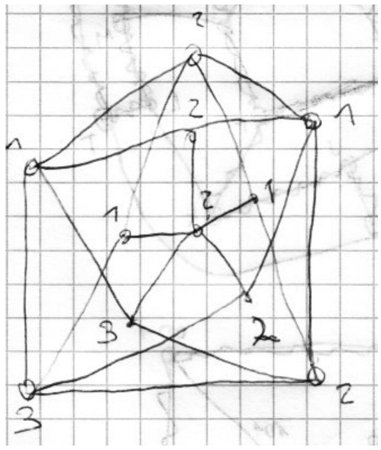
- Naj bo *G* (enostaven) graf in $k\in\mathbb{N}$. Preslikava $f:V(G)\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ je ***k*-barvanje** grafa *G*, če za poljubni sosedni točki *u*, *v* iz *G* velja, da $f(u)\neq f(v)$.
- **Kromatično število** grafa *G*, označimo z $\chi(G)$, je najmanjše tako število *k*, da obstaja *k*-barvanje grafa G.

Trditve:

- $\chi(G)\leq|V(G)|$ in enakost velja ntk. je graf *G* poln.

- $\chi(G) \leq 2$ nkt. je G dvodelen.
- Za $k \geq 3$ niso znani nobeni (enostavni) potrebni in zadostni pogoji za to, da je $\chi(G) \leq k$.
- $\chi(K_n) = n$ in $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{n je sod} \\ 3, & \text{n je lih} \end{cases}$.
- $H \leq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$.
- Če graf vsebuje kot podgraf kliko (poln graf) na k točkah, tedaj je $\chi(G) \geq k$. Obratno ne velja.

Zgled:



Ne vsebuje trikotnikov, a je kromatično število 4. Gre za graf Micelskega (?). Konstrukcija: začnemo s C_5 . Za vsako točko naredimo njeno kopijo in jo povežemo z istimi sosedami, kot je bila povezana v prvem grafu (ne z njenimi kopijami!). Tako vedno dobimo graf z eno višjo kromatično stopnjo.

Brooksov izrek

Trditev: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Dokaz: Indukcija po $n = |V(G)|$. Očitno za n=1. Naj bo $n > 1$ in $v \in V(G)$. Ker $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$, po indukcijski predpostavki obstaja barvanje G-v z $\Delta(G) + 1$ barvami. Sosednje točke v so obarvane in ker jih je kvečjemu $\Delta(G)$, imamo za točko v na voljo še eno barvo in barvanje G-v lahko razširimo na G.

Izrek (Brooks): Če je G povezan enostaven graf, ki ni niti lih cikel niti poln graf, tedaj je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Barvanje zemljevidov

F. Guithrie (okrog 1950) je postavil naslednjo ***domnevo***: vsak zemljevid se da pobarvati s 4 barvami (točka na tro-ali-več-meji ne šteje za skupne točke sosednjih držav).

Izrek (Appel, Haken 1976): Vsak ravninski graf se da obarvati s 4 barvami. (Krajši dokaz: Seymaur, Thomas, Robertson, Sandras, 1995).

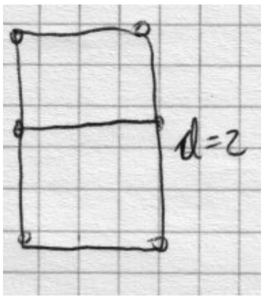
Grötszch, ***izrek***: Vsak ravninski graf brez trikotnikov je 3-obarvljiv.

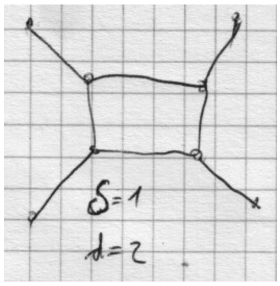
k-degenerirani grafi

Definicija: Naj bo *G* graf in *k* naravno število. Če je minimalna stopnja $\delta(H) \leq k$ za vsak podgraf *H* grafa *G*, potem rečemo, *G* ***k*-degeneriran**.

Degeneriranost grafa *G* je najmanjše število *k*, za katero je *G* *k*-degeneriran in to število je $d(G) = \max_{H \subseteq G} \delta(H)$.

Če je *G* k_1-degeneriran in $k_1 \leq k_2$, je tudi k_2-degeneriran .





Trditev: Če je *G* *k*-degeneriran, potem lahko točke grafa razvrstimo ($v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n$) tako, da $\forall\, v_i$ ima največ *k* sosedov z manjšim indeksom.

Dokaz: Naj bo *G* *k*-degeneriran. *G* ima točko stopnje največ *k*; naj bo to točka v_n (v razvrstitvi jo zapišemo zadnjo). Potem naj bo $G_n = G - v_n$, ki je prav tako (vsaj) *k*-degeneriran. Naj bo v_{n-1} točka v G_n stopnje največ *k* (ta točka bo predzadnja v razvrstitvi). $G_{n-1} = G_n - v_{n-1}$ je spet *k*-degeneriran in po istem postopku razvrščamo točke do praznega grafa. Našli smo postopek za iskanje take razvrstitve, torej je trditev resnična.

Trditev: Vsak *k*-degeneriran graf je (*k*+1)-obarvljiv (torej je $\chi(G) \leq k+1$).

Dokaz: Po postopku iz prejšnje trditve/dokaza lahko točke razvrstimo tako, da ima vsaka točka največ *k* povezav do točk z manjšim indeksom. Če barvamo po vrsti, pri posamezni točki v najslabšem primeru dobimo največ *k* različno obarvanih sosedov, ki že imajo določeno barvo. V tem primeru uporabimo (*k*+1). barvo.

Posledica: Vsak ravninski graf je 5-degeneriran in zato 6-obarvljiv.

Dokaz: Naj bo *G* ravninski graf. Zato ima točko stopnje največ 5 (to smo že pokazali). Vsak njegov podgraf je prav tako ravninski, zato ima tudi stopnjo največ 5. *G* je 5-degeneriran.

Kromatični polinom

Definicija: Naj bo *G* enostaven graf in naj bo funkcija $P(G,k)$ število barvanj grafa *G* s *k*-barvami. Potem to funkcijo imenujemo **kromatični polinom** grafa *G*. *(Dokaz, da je ta funkcija res polinom, pride kasneje.)*

Velja: $\chi(G)$ je minimalni *k*, za katerega velja $P(G,k) > 0$.

$$P(C_3, k) = k(k-1)(k-2)$$

$$P(K_n, k) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$$

$$P(P_3, k) = k(k-1)(k-1) \quad ; \quad P(P_n, k) = k(k-1)^{n-1}$$

$P(\text{drevo na } n \text{ točkah}, k) = k(k-1)^{n-1}$

Trditev: Naj bo *G* graf in *e* povezava v njem. Potem $P(G, k) = P(G-e, k) - P(G/e, k)$.

Primer: $P(C_4, k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)\big((k-1)^2 - (k-2)\big) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$.
$P(C_5, k) = P(P_5, k) - P(C_4, k) = k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2 - 3k + 3) = \ldots$ (nekaj grdega)

Dokaz trditve, da je funkcija *P* polinom, je induktiven (ker imamo funkcijo, da izračunamo *P* iz dveh manjših grafov).

Kritični grafi

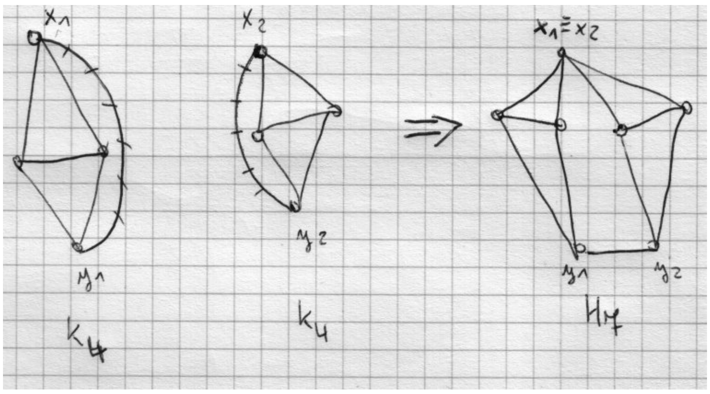
Definicija: Graf *G* je ***k*-kritičen**, če je $\chi(G) = k$ in za vsak podgraf *H* grafa *G* velja $\chi(G) < k$.

Edini 1-kritičen graf je K_1. Edini 2-kritičen graf je K_2.

3-kritični grafi so lihi cikli. Kaj še? Po dolgem premisleku mislimo, da ga ni. Pokažimo. Naj bo *G* 3-kritičen. Torej ima lih cikel *C*, ker ni dvodelen. Katerokoli povezavo ali točko odstranimo, postane graf 2-delen (ker ima kromatično število 2). Če imamo v *G* kaj, kar ni na omenjenem lihem ciklu, bi lahko odstranili, *G* bi še vedno imel lih cikel in ne bi dobili 2-delnega grafa, zato *G* ne bi bil 3-kritičen. *G* je zato sam po sebi lih cikel.

4-kritični? K_4. 4-kritična so tudi liha kolesa (lih cikel, na sredini dodatna točka, ki je povezana z vsemi ostalimi) - K_4 je v bistvu tudi liho kolo. Obstajajo še drugi, npr. H_7 (glej sliko spodaj).

Hajoševa vsota



Naj sta G_1 in G_2 dva disjunktna grafa in naj bo $x_i y_i$ povezava v G_i za $i = 1, 2$. $H(G_1, G_2)$ je graf, ki ga dobimo iz grafov G_1 in G_2 tako, da odstranimo $x_i y_i$ v G_i, identificiramo x_1 in x_2 ter povežemo y_1 in y_2.

Trditvi:

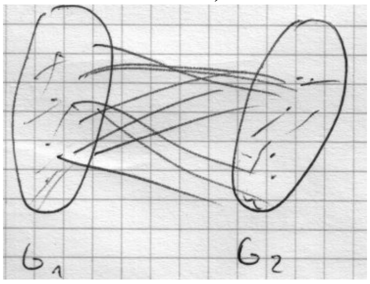
- Če $\chi(G_1) = \chi(G_2) = k \Rightarrow \chi\big(H(G_1, G_2)\big) = k$.
- Če sta G_1, G_2 *k*-kritična, je $H(G_1, G_2)$ tudi *k*-kritičen.

Tako lahko iz znanih *k*-kritičnih grafov delamo poljubne nove. Mimogrede, Hajoševa vsota dveh lihih ciklov je spet lih cikel, torej zares nismo pridobili nobenega novega 3-kritičnega grafa.

Trditev: Število *k*-kritičnih grafov je neskončno za $k \geq 3$ (uporabimo lahko npr. Hajoševo transformacijo na K_k neskončno-krat).

Spoj

Spoj (join) grafov G_1 in G_2 (označimo G_1+G_2):



Vsako točko iz G_1 povežemo z vsako točko v G_2 .

Trditev: Če je G_1 k_1-kritičen in G_2 k_2-kritičen , je G_1+G_2 k_1+k_2-kritičen .

Primer: Spoj dveh lihih ciklov je 6-kritičen graf.