Izbrana poglavja iz matematike
6. sklop nalog

Diskretna Fourierova transformacija

(1) (a) Izračunaj diskretno Fourierovo transformacijo funkcij:

$$1_N = \underbrace{(1,\ldots,1)}_{N},$$
$$\omega_N^l = (1,\omega^l,\omega^{2l},\ldots,\omega^{(N-1)l}),$$

kjer je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

(b) Izračunaj diskretno Fourierovo transformacijo funkcij:

$$\delta_0 = \underbrace{(1,0,\ldots,0)}_{N},$$
$$\delta_l = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),$$

kjer je enica na $(l+1)$-vem mestu, za $1 \leq l \leq N-1$.

Rešitev: Pri analizi diskretnih signalov (filtriranju, stiskanju podatkov,...) pogosto pride prav diskretna Fourierova transformacija (DFT). Prostor funkcij $\{0,1,\ldots,N-1\} \to \mathbb{C}$ ponavadi identificiramo z vektorskim prostorom $\mathbb{C}^N$, pri čemer si vektor

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$$

predstavljamo kot funkcijo, ki k preslika v x_k. Pogosto uporabljamo tudi oznako $x[k] = x_k$. Standardni bazi prostora $\mathbb{C}^N$ pri tej identifikaciji ustrezajo delta funkcije

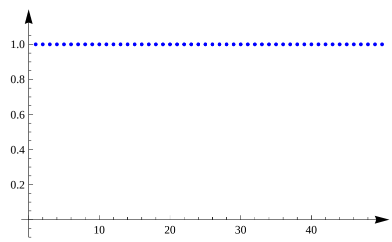
$$\delta_l = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0),$$

kjer je $0 \leq l \leq N-1$, enica pa je na $(l+1)$-vem mestu. Diskretno Fourierovo transformacijo lahko v tem smislu pojmujemo kot linearno preslikavo $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, podano s predpisom

$$(\mathcal{F}x)[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i \frac{k}{N} n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{-kn}.$$

Pri računanju zaradi lažjega pisanja uporabljamo oznako $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

(a) Izračunajmo sedaj DFT funkcije $1_N = (1,1,\ldots,1)$.



Funkcija 1_N je diskreten analog konstantne funkcije.

$$(\mathcal{F}1_N)[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1\cdot\omega^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{-kn}.$$

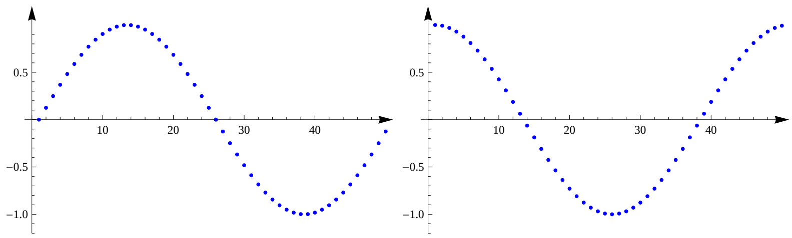
Pri $k = 0$ so vsi členi v zgornji vsoti enaki 1, od koder sledi $(\mathcal{F}1_N)[0] = 1$. Pri $k \neq 0$ pa moramo izračunati vsoto geometrijskega zaporedja s količnikom ω^{-k}. Sledi

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{-kn} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-(\omega^{-k})^N}{1-\omega^{-k}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{-2\pi ik}}{1-\omega^{-k}} = 0.$$

Vidimo, da DFT preslika konstantno funkcijo v delta funkcijo, ki je skoncentrirana v izhodišču

$$\mathcal{F}1_N = \delta_0.$$

Poglejmo sedaj funkcije ω_N^l. To so diskretni analogi kompleksnih eksponentnih funkcij, njihovi realni in imaginarni deli pa ustrezajo kosinusom oziroma sinusom.



Sedaj imamo

$$(\mathcal{F}\omega_N^l)[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{ln}\cdot\omega^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\omega^{(l-k)n}.$$

Ta vsota bo, po istem premisleku kot prej, neničelna le pri $k = l$, kar nam da

$$\mathcal{F}\omega_N^l = \delta_l.$$

(b) Na podoben način lahko izračunamo tudi DFT delta funkcij.

$$(\mathcal{F}\delta_0)[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta_0[n]\omega^{-kn} = \frac{1}{N},$$

od koder sledi

$$\mathcal{F}\delta_0 = \frac{1}{N}1_N.$$

Za splošen l pa imamo

$$(\mathcal{F}\delta_l)[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta_l[n]\omega^{-kn} = \frac{1}{N}\omega^{-kl},$$

oziroma

$$\mathcal{F}\delta_l = \frac{1}{N}\omega_N^{-l}.$$

$\square$

(2) Na prostoru funkcij $\{0, 1, \ldots, N-1\} \to \mathbb{C}$ definiramo konvolucijski produkt

$$(x * y)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[k-n]y[n],$$

kjer definiramo $x[k-n] = x[k-n+N]$, če je $k < n$.

(a) Pokaži, da za vsako funkcijo x velja $x * \delta_0 = \delta_0 * x = x$.

(b) Izračunaj $\omega_N^l * \omega_N^m$.

Rešitev: Prostor funkcij $\{0, 1, \ldots, N-1\} \to \mathbb{C}$, opremljen s konvolucijskim produktom, včasih (v bolj matematičnih kontekstih) označimo tudi z oznako

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_N].$$

S tem poudarimo, da v bistvu opazujemo funkcije na ciklični grupi $\mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$, ki je opremljena z modularnim seštevanjem. Operacija seštevanja v grupi $\mathbb{Z}_N$ potem porodi konvolucijski produkt na prostoru funkcij $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_N]$. Dobljeni prostor funkcij, opremljen s konvolucijskim produktom, imenujemo konvolucijska algebra grupe $\mathbb{Z}_N$.

Na podoben način lahko definiramo konvolucijsko algebro poljubne končne grupe. Pri analizi signalov so zanimivi predvsem produkti dveh, treh ali večih cikličnih grup, ki ustrezajo višje dimenzionalni diskretni Fourierovi transformaciji. V splošnem je množenje funkcij v konvolucijski algebri komutativno natanko takrat, ko je grupa komutativna.

(a) Najprej pokažimo, da je delta funkcija δ_0 enota za konvolucijsko množenje. Za poljuben $x \in \mathbb{C}[\mathbb{Z}_N]$ velja

$$(\delta_0 * x)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_0[k-n]x[n] = x[k].$$

Ker je konvolucijski produkt v našem primeru komutativen, od tod sledi

$$\delta_0 * x = x * \delta_0 = x.$$

(b) Izračunajmo sedaj še konvolucijski produkt diskretnih kompleksnih eksponentnih funkcij:

$$(\omega_N^l * \omega_N^m)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^l[k-n]\omega_N^m[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{l(k-n)}\omega^{mn} = \omega^{lk} \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(m-l)}.$$

Sedaj ločimo dva primera:

$$\cdot\, m \neq l \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(m-l)} = 0,$$

$$\cdot\, m = l \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n(m-l)} = N.$$

Od tod sledi

$$\omega_N^l * \omega_N^m = \begin{cases} 0 & ;\ l \neq m, \\ N\omega_N^l & ;\ l = m. \end{cases}$$

Opomba: Konvolucijski produkt funkcij je v tesni povezavi z množenjem polinomov. Če poljubni funkciji $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ priredimo polinom

$$p_x(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \cdots + x_{N-1} t^{N-1},$$

potem velja

$$p_{x*y} = p_x p_y.$$

Konvolucijskemu produktu torej ustreza množenje polinomov, kjer pri množenju potence polinomov seštevamo po modulu N. $\square$

(3) Dan je vektor $h = \frac{1}{3}(1, \omega, \omega^2) \in \mathbb{C}^3$, kjer je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Definirajmo linearno preslikavo $H : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ s predpisom

$$H(x) = h * x.$$

Zapiši matriko, ki pripada preslikavi H v bazi $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ ter poišči lastne vektorje in lastne vrednosti preslikave H.

Rešitev: Za zapis matrike moramo izračunati, kam preslikava H preslika vektorje $\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$:

$$\begin{aligned} H(\delta_0) &= \frac{1}{3}(1, \omega, \omega^2), \\ H(\delta_1) &= \frac{1}{3}(\omega^2, 1, \omega), \\ H(\delta_2) &= \frac{1}{3}(\omega, \omega^2, 1). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$H = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo sedaj lastne vrednosti matrike $3H$ (z upoštevanjem enakosti $\omega^3 = 1$):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1-\lambda & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1-\lambda) = \lambda^2(3-\lambda).$$

Matrika H ima dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 0$ ter lastno vrednost $\lambda_3 = 1$.

Lastna vektorja, ki zadoščata lastni vrednosti $\lambda = 0$, morata rešiti sistem enačb

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Druga in tretja vrstica sta večkratnika prve vrstice, zato je dovolj poiskati dva vektorja, ki zadoščata prvi enačbi. Če upoštevamo, da je $1 + \omega + \omega^2 = 0$, lahko izberemo $v_1 = (1, 1, 1)$ in $v_2 = (1, \omega^2, \omega)$. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 1$, mora rešiti sistem enačb

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & \omega^2 & \omega \\ \omega & -2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Izberemo lahko vektor $v_3 = (1, \omega, \omega^2)$. $\square$

(4) (a) Zapiši matriko F, ki pripada Fourierovi transformaciji v bazi $\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{N-1}\}$.
(b) Izračunaj F^*F in od tod izpelji predpis za inverzno Fourierovo transformacijo.

Rešitev: (a) Izračunali smo že, da velja

$$\mathcal{F}\delta_l = \frac{1}{N}\omega_N^{-l} = \frac{1}{N}\delta_0 + \frac{\omega^{-l}}{N}\delta_1 + \frac{\omega^{-2l}}{N}\delta_2 + \cdots + \frac{\omega^{-(N-1)l}}{N}\delta_{N-1}.$$

Matriko, ki pripada diskretni Fourierovi transformaciji v bazi $\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{N-1}\}$, dobimo, če koeficiente v zgornjih razvojih zložimo v stolpce

$$F = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \ldots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} & \ldots & \omega^{-2(N-1)} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} & \ldots & \omega^{-3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \omega^{-3(N-1)} & \ldots & \omega^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

(b) Računajmo:

$$F^*F = \frac{1}{N^2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \ldots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)^2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \ldots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \ldots & \omega^{-2(N-1)} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \ldots & \omega^{-3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \ldots & \omega^{-(N-1)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{N^2}\begin{vmatrix} N & & & & \\ & N & & & \\ & & N & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N \end{vmatrix} = \frac{1}{N}\mathrm{Id}.$$

Od tod vidimo, da je inverz matrike F enak

$$F^{-1} = NF^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(N-1)} \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \ldots & \omega^{3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)^2} \end{vmatrix},$$

od koder sledi formula za inverzno diskretno Fourierovo transformacijo

$$(\mathcal{F}^{-1}x)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{kn}.$$

Opomba: Obstaja več rahlo različnih definicij diskretne Fourierove transformacije. Poleg te, ki jo uporabljamo mi, bi lahko DFT definirali brez faktorja $\frac{1}{N}$, ki bi se potem pojavil pri inverzni DFT. Včasih se pojavi tudi definicija, kjer je tako pri DFT kot pri IDFT faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$. V tem primeru je DFT unitarna transformacija. □

(5) Naj bo $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ diskretna Fourierova transformacija.

(a) Pokaži, da velja $(\mathcal{F}_N)^4 = \frac{1}{N^2}\mathrm{Id}_N$.

(b) Kaj lahko poveš o lastnih vrednostih preslikave $\mathcal{F}_N$?

(c) Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave $\mathcal{F}_2$.

Rešitev: (a) Enakost $(\mathcal{F}_N)^4 = \frac{1}{N^2}\mathrm{Id}_N$ bi lahko dokazali z izračunom četrte potence matrike, ki ustreza diskretni Fourierovi transformaciji. Malce bolj enostavno pa jo lahko dokažemo z upoštevanjem enakosti:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N\delta_l &= \frac{1}{N}\omega_N^{-l} = \frac{1}{N}\omega_N^{N-l}, \\ \mathcal{F}_N\omega_N^l &= \delta_l. \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$(\mathcal{F}_N)^2\delta_l = \frac{1}{N}\delta_{N-l}$$

in

$$(\mathcal{F}_N)^4\delta_l = \frac{1}{N^2}\delta_l.$$

(b) Pri točki (a) smo pokazali, da velja $(\mathcal{F}_N)^4 = \frac{1}{N^2}\mathrm{Id}_N$. To nam omogoča, da natanko povemo, katere so možne lastne vrednosti preslikave $\mathcal{F}_N$. Če je namreč p polinom in λ lastna vrednost matrike A, je $p(\lambda)$ lastna vrednost matrike $p(A)$.

V našem primeru to pomeni, da vsaka lastna vrednost λ preslikave $\mathcal{F}_N$ zadošča enačbi $\lambda^4 = \frac{1}{N^2}$. Od tod dobimo, da so možne lastne vrednosti preslikave $\mathcal{F}_N$ samo

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}, -\frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{i}{\sqrt{N}}, -\frac{i}{\sqrt{N}}\right\}.$$

Za vsak N je mogoče eksplicitno izračunati večkratnosti vsake lastne vrednosti, medtem ko je precej težje izračunati pripadajoče lastne vektorje.

Večkratnosti so prikazane v spodnji tabeli.

N	$\frac{1}{\sqrt{N}}$	$-\frac{1}{\sqrt{N}}$	$-\frac{i}{\sqrt{N}}$	$\frac{i}{\sqrt{N}}$
$4k$	$k+1$	k	k	$k-1$
$4k+1$	$k+1$	k	k	k
$4k+2$	$k+1$	$k+1$	k	k
$4k+3$	$k+1$	$k+1$	$k+1$	k

(c) Lastne vrednosti in lastne vektorje DFT bomo izračunali za primer $N = 2$. Matrika DFT je tedaj

$$F_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Če računamo lastne vrednosti matrike kA, je dovolj izračunati lastne vrednosti matrike A in jih nato na koncu pomnožiti s k. Karakteristični polinom matrike $2F_2$ je enak

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2,$$

od koder sledi, da sta lastni vrednosti preslikave $\mathcal{F}_2$ števili:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Lastna vektorja sta vektorja, ki napenjata jedri preslikav $\mathcal{F}_2 - \lambda_1 \mathrm{Id}_2$ in $\mathcal{F}_2 - \lambda_2 \mathrm{Id}_2$. To pomeni, da mora vektor v_1, ki pripada lastni vrednosti λ_1, zadoščati sistemu enačb

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Vrstici sta linearno odvisni, zato je dovolj poiskati vektor, ki reši zgornjo enačbo. Prvo koordinato si lahko izberemo poljubno, druga pa je nato natanko določena. Vzamemo lahko npr. vektor $v_1 = (1, -1+\sqrt{2})$.

Vektor v_2, ki pripada lastni vrednosti λ_2, pa mora rešiti sistem enačb

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Sedaj lahko vzamemo npr. vektor $v_2 = (1, -1-\sqrt{2})$. □

(6) Pokaži, da za vsaka $x, y \in \mathbb{C}^N$ velja enakost

$$\mathcal{F}(x * y) = N\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y).$$

Rešitev: V tej nalogi bomo dokazali verzijo izreka o konvoluciji za diskretno Fourierovo transformacijo

$$\mathcal{F}(x * y) = N\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y).$$

Začeli bomo s preprostim primerom, ko sta x in y delta funkciji. Naj bo torej:

$$x = \delta_l,$$
$$y = \delta_m.$$

Izračunali smo že diskretno Fourierovo transformacijo delta funkcije

$$\mathcal{F}(\delta_l) = \tfrac{1}{N}\omega_N^{-l}.$$

Konvolucija dveh delta funkcij pa je enaka

$$(\delta_l * \delta_m)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_l[k-n]\delta_m[n] = \delta_l[k-m].$$

Izraz na desni bo skoraj vedno enak nič, razen ko bo $k = l + m$. Torej je

$$\delta_l * \delta_m = \delta_{l+m},$$

kjer moramo $l + m$ vzeti po modulu N. Od tod sedaj sledi

$$\mathcal{F}(\delta_l * \delta_m) = \mathcal{F}(\delta_{l+m}) = \tfrac{1}{N}\omega_N^{-(l+m)}$$

in

$$N\mathcal{F}(\delta_l)\mathcal{F}(\delta_m) = N \cdot \tfrac{1}{N}\omega_N^{-l} \cdot \tfrac{1}{N}\omega_N^{-m} = \tfrac{1}{N}\omega_N^{-(l+m)}.$$

Izrek o konvoluciji smo torej dokazali v primeru delta funkcij. Za splošen primer pa bomo uporabili dejstvo, da lahko poljubno funkcijo zapišemo kot linearno kombinacijo delta funkcij:

$$x = \sum_{l=0}^{N-1} x_l \delta_l,$$
$$y = \sum_{m=0}^{N-1} y_m \delta_m.$$

Z upoštevanjem linearnosti DFT in bilinearnosti konvolucije dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x * y) &= \mathcal{F}\left(\left(\sum_{l=0}^{N-1} x_l \delta_l\right) * \left(\sum_{m=0}^{N-1} y_m \delta_m\right)\right), \\
&= \mathcal{F}\left(\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x_l y_m \delta_l * \delta_m\right), \\
&= \mathcal{F}\left(\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x_l y_m \delta_{l+m}\right), \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x_l y_m \omega_N^{-(l+m)}.
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa velja:

$$\begin{aligned}
N\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y) &= N\mathcal{F}\left(\sum_{l=0}^{N-1} x_l \delta_l\right)\mathcal{F}\left(\sum_{m=0}^{N-1} y_m \delta_m\right), \\
&= N\left(\sum_{l=0}^{N-1} x_l \mathcal{F}(\delta_l)\right)\left(\sum_{m=0}^{N-1} y_m \mathcal{F}(\delta_m)\right), \\
&= N\left(\sum_{l=0}^{N-1} x_l \tfrac{1}{N}\omega_N^{-l}\right)\left(\sum_{m=0}^{N-1} y_m \tfrac{1}{N}\omega_N^{-m}\right), \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x_l y_m \omega_N^{-(l+m)}.
\end{aligned}$$

□

(7) (a) Izračunaj diskretno kosinusno transformacijo vektorja $v = (1, 0, 1, 0)$.

(b) Izračunaj $2D$-diskretno kosinusno transformacijo matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Rešitev: Diskretna kosinusna transformacija je analog DFT, ki se uporablja za kompresijo slik in videov. Za razliko od DFT je pri DCT spekter realnih signalov realen, zato jo lahko smatramo kot linearno preslikavo $\mathcal{C} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Za vektor $x \in \mathbb{R}^N$ je diskretna kosinusna transformacija definirana s predpisom

$$(\mathcal{C}x)[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right).$$

(a) Konkretno si bomo pogledali DCT pri $N = 4$. V tem primeru je $\mathcal{C}_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearna preslikava, ki jo lahko podamo z matriko

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{10\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{14\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{21\pi}{8}\right) \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$C_4 \cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{6\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{10\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{14\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) & \cos\left(\frac{21\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{15\pi}{8}\right) \end{bmatrix}.$$

(b) Dvodimenzionalno diskretno kosinusno transformacijo interpretiramo kot linearno preslikavo iz prostora matrik nazaj nase. Matriki $A = (A_{ij})$ tako priredimo matriko

$$(\mathcal{C}A)[k_1, k_2] = \sum_{n_1,n_2=0}^{N-1} A_{n_1,n_1} \cos\left(\frac{\pi(2n_1+1)k_1}{2N}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n_2+1)k_2}{2N}\right).$$

V praksi se diskretna kosinusna transformacija računa s pomočjo algoritmov, ki so analogni hitri Fourierovi transformaciji, teoretično pa lahko diskretno kosinusno transformacijo neke kvadratne matrike izračunamo na tri podobne načine.

<u>1. način:</u>

Dvodimenzionalno DCT lahko izračunamo z dvakratno uporabo enodimenzionalne DCT na stolpcih in nato na vrsticah matrike A. Matrika, ki jo uporabljamo je

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Če izvedemo DCT na stolpcih matrike A, dobimo matriko

$$A_s = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Sedaj moramo DCT izvesti še na vrsticah matrike A_s. Tako dobimo matriko

$$\mathcal{C}A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2. način:

Ta način je analogen prvemu načinu, le da najprej izvedemo DCT na vrsticah in nato na stolpcih. Če izvedemo DCT na vrsticah matrike A, dobimo matriko

$$A_v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Ko izvedemo DCT na stolpcih matrike A_v, dobimo matriko

$$\mathcal{C}A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

3. način:

Diskretno kosinusno transformacijo lahko izvedemo tudi z uporabo dveh matričnih množenj po formuli

$$\mathcal{C}A = C_2 A C_2^T.$$

Tako dobimo

$$\mathcal{C}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Množenje z matriko C_2 z leve ustreza izvedbi DCT po stolpcih matrike A, množenje z matriko C_2^T z desne pa izvedbi DCT po vrsticah matrike A. Zaradi asociativnosti matričnega množenja ni važno v kakšnem vrstnem redu izvajamo enodimenzionalno DCT.

□