Dodatne vaje iz Izbranih poglavij iz matematike

---

(1) Izračunaj kompleksne integrale:

(a) funkcije $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ po krožnici $|z| < 2$,

(b) funkcije $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 - 8}$ po krivulji K s parametrizacijo $\gamma(t) = 2 + e^{it}$ za $t \in [0, 2\pi]$,

(c) funkcije $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z}$ po robu kvadrata z oglišči $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ in $1 - i$.

Rešitev:

(a) $I = 0$,
(b) $I = \frac{2\pi i}{3}$,
(c) $I = 2\pi i$.

(2) S pomočjo kompleksne integracije izračunaj naslednja integrala:

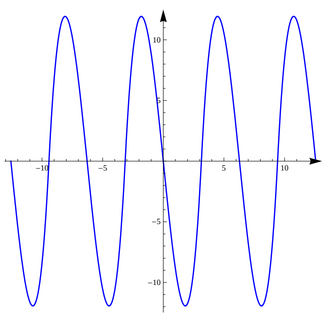
(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin x}\, dx$,

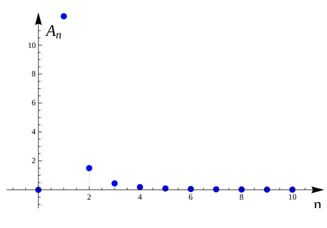
(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$.

Rešitev:

(a) $I = \frac{\pi}{2}$,
(b) $I = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

(3) Razvij funkcijo $f(x) = x(x^2 - \pi^2)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.





Rešitev:

$$f(x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

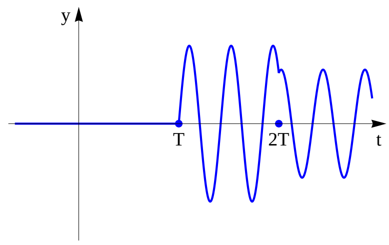
(4) Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$m\ddot{y} + ky = G\delta_T + G\delta_{2T}$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: Če označimo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, je

$$y(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq T, \\ \frac{G}{m\omega_0}\sin(\omega_0(t-T)) & ; T \leq t \leq 2T, \\ \frac{G}{m\omega_0}(\sin(\omega_0(t-T)) + \sin(\omega_0(t-2T))) & ; T \leq t \leq 2T. \end{cases}$$



(5) Na vzmet s koeficientom $k = 1\frac{N}{m}$ je pripeta utež z maso $m = 1kg$. Nihanje vzmeti duši blažilec s koeficientom $c = 1\frac{Ns}{m}$. Na začetku vzmet miruje v ravnovesni legi, nato pa jo potisnemo tako, da se začne premikati s hitrostjo $v = 10\frac{m}{s}$. Po kolikšnem času se vzmet prvič vrne v ravnovesno lego?

Rešitev: $T = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}s$.

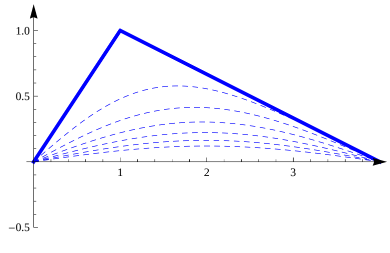
(6) Dana je toplotna enačba $\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pri robnih pogojih $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ in pri začetnemu pogoju $u(x,0) = f(x)$. Pokaži, da lahko rešitev enačbe zapišemo v obliki

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2k^2t}\cos(nx),$$

kjer so (A_n) koeficienti, ki jih dobimo pri razvoju funkcije $f(x)$ v Fourierovo kosinusno vrsto na intervalu $[0,\pi]$.

(7) Reši toplotno enačbo $\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pri robnih pogojih $u(0,t) = u(4,t) = 0$ in pri začetnem pogoju $u(x,0) = f(x)$, kjer je

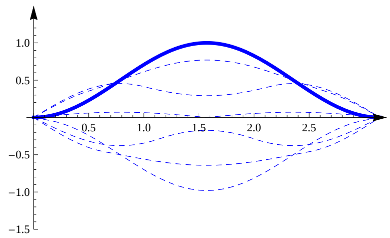
$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{4-x}{3} & ; 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$



Rešitev:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32 \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{3n^2\pi^2} e^{-\left(\frac{nk\pi}{4}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right).$$

(8) Reši valovno enačbo $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pri robnih pogojih $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ in pri začetnih pogojih $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ ter $u(x,0) = \sin^2 x$.



Rešitev:

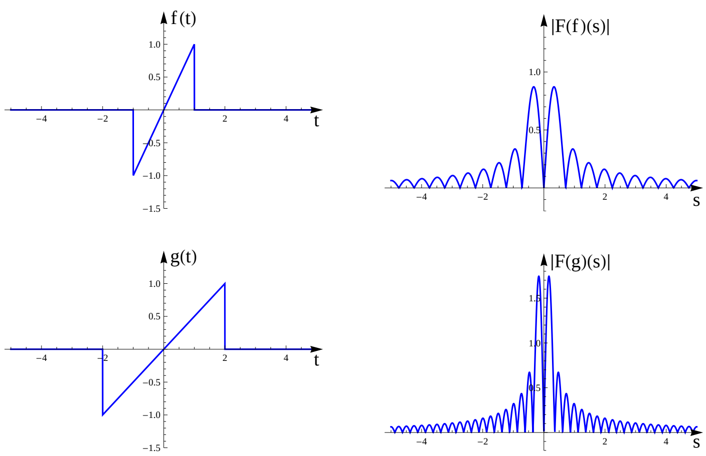
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1+(-1)^n)}{\pi(n^3-4n)} \cos(ncx)\sin(nx).$$

(9) Izračunaj Fourierovi transformaciji funkcij:

(a) $f(t) = \begin{cases} t & ; |t| < 1, \\ 0 & ; |t| \geq 1. \end{cases}$

(b) $g(t) = \begin{cases} at & ; |t| < b, \\ 0 & ; |t| \geq b, \end{cases}$

kjer sta a in b pozitivni konstanti.



Rešitev:

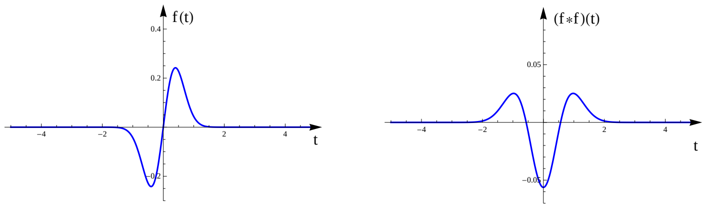
(a) $\mathcal{F}(f)(s) = i\dfrac{2\pi s\cos(2\pi s) - \sin(2\pi s)}{2\pi^2 s^2}$,

(b) $\mathcal{F}(g)(s) = ia\dfrac{2\pi bs\cos(2\pi bs) - \sin(2\pi bs)}{2\pi^2 s^2}$.

(10) Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $f(t) = te^{-\pi t^2}$.

(a) Pokaži, da velja $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\pi t^2}\, dt = \frac{1}{2\pi}$.

(b) Izračunaj konvolucijo $f * f$.



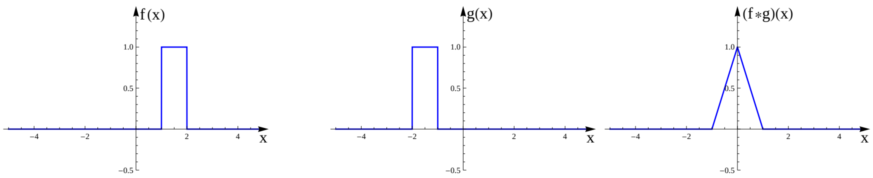
Rešitev: $(f * f)(t) = \frac{e^{-\frac{\pi t^2}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{t^2}{4} - \frac{1}{4\pi}\right)$.

(11) Dani sta funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ;\ 1 < x < 2, \\ 0 & ;\ x \leq 1 \text{ ali } x \geq 2, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ;\ -2 < x < -1, \\ 0 & ;\ x \leq -2 \text{ ali } x \geq -1. \end{cases}$$

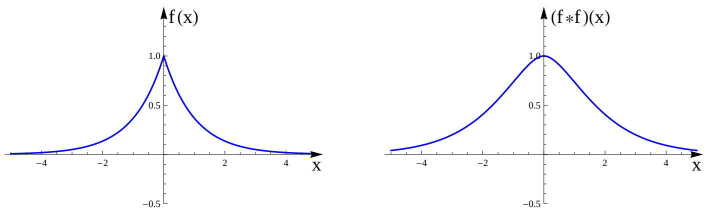
Izračunaj konvolucijo $f * g$.



Rešitev:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 1 - |x| & ;\ |x| < 1, \\ 0 & ;\ |x| \geq 1. \end{cases}$$

(12) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom $f(x) = e^{-|x|}$. Izračunaj $f * f$.



Rešitev: $(f * f)(x) = (1 + |x|)e^{-|x|}$.

(13) Naj bo $\mathcal{F} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ diskretna Fourierova transformacija za $N = 3$. Izračunaj lastne vrednosti preslikave $\mathcal{F}$.

Rešitev: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$.

(14) Pokaži, da za diskretno Fourierovo transformacijo $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ in za vsak $x \in \mathbb{C}^N$ velja Parsevalova enakost:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |(\mathcal{F}x)_n|^2.$$

(15) Za poljubna $x \in \mathbb{C}^N$ in $0 \le l \le N-1$ definiramo $x_l \in \mathbb{C}^N$ s predpisom

$$x_l[k] = x[k-l],$$

kjer je operacija odštevanja definirana modulo N.

(a) Pokaži, da velja $x_l = x * \delta_l$ za vsaka $x \in \mathbb{C}^N$ in $0 \le l \le N-1$.

(b) Dokaži pravilo pomika za DFT:

$$(\mathcal{F}x_l)[k] = \omega^{-kl}(\mathcal{F}x)[k].$$