Izbrana poglavja iz matematike
5. sklop nalog

Fourierova transformacija

(1) Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana s predpisom:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; |t| < \frac{1}{2}, \\ 0 & ; |t| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(a) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije f.

(b) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije $g(t) = f(\lambda t)$ za $\lambda > 0$.

Rešitev: Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero obstaja $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$. Tipični predstavniki, ki jih bomo obravnavali, bodo oblike:

· funkcije, ki so neničelne samo na nekem omejenem intervalu,

· funkcije tipa $f(t) = Ce^{-|p(t)|}$ za nek polinom p.

Za vsako takšno funkcijo lahko definiramo njeno Fourierovo transformacijo

$$\mathcal{F}(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i s t}\, dt,$$

ki je spet funkcija $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Po Riemann-Lebesgueovi lemi gre funkcija $\mathcal{F}(f)$ v neskončnosti proti nič, vendar pa integral $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f)(s)|\, ds$ ne konvergira zmeraj.

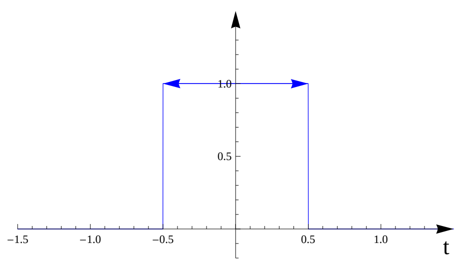
Intuitivno si ponavadi predstavljamo, da:

· f predstavlja nek signal v časovni domeni,

· $\mathcal{F}(f)$ predstavlja isti signal v frekvenčni domeni.

Kadar nas zanimajo lastnosti Fourierove transformacije, pa jo je bolje interpretirati kot operator, ki slika funkcije v funkcije.

(a) Pri tej nalogi imamo funkcijo, ki je neničelna na simetričnem intervalu dolžine ena, kjer zavzame vrednost ena.



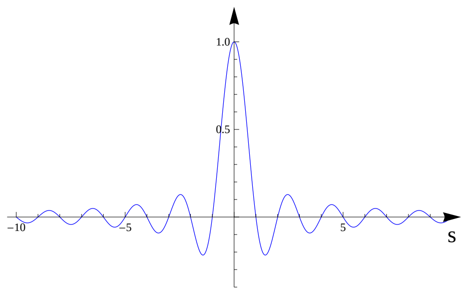
Računajmo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ist}\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ist}\,dt,\\
&= \frac{1}{-2\pi is}e^{-2\pi ist}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{-2\pi is}\left(e^{-\pi is} - e^{\pi is}\right),\\
&= \frac{1}{\pi s}\left(\frac{\cos(\pi s) - i\sin(\pi s) - \cos(\pi s) - i\sin(\pi s)}{-2i}\right),\\
&= \underline{\underline{\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}}}.
\end{aligned}$$

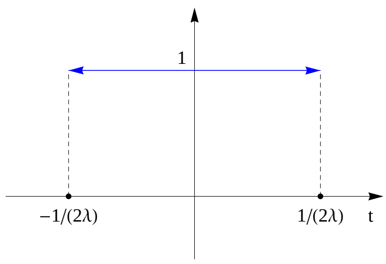
<u>Opomba</u>: Funkcija $\mathcal{F}(f)$ se pogosto uporablja pri analizi signalov. Običajna oznaka je

$$\operatorname{sinc}(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}.$$

Ničle funkcije sinc so cela števila razen nič, v neskončnosti pa gre funkcija proti nič.



(b) Graf funkcije g dobimo z raztegom grafa funkcije f.



Za izračun Fourierove transformacije funkcije g bomo uporabili:

<u>Pravilo raztega</u>:

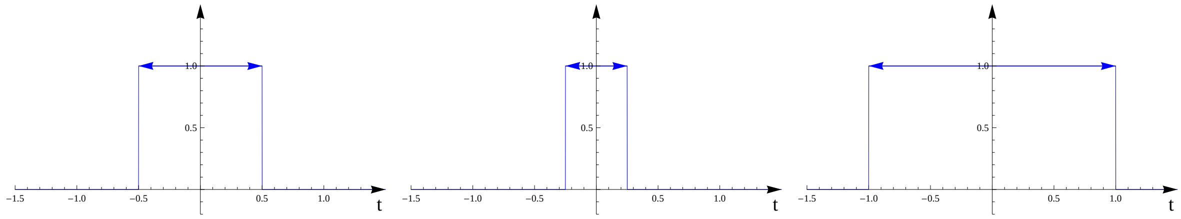
Naj bo funkcija g definirana s predpisom $g(t) = f(\lambda t)$ za nek neničeln $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\mathcal{F}(g)(s) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{s}{\lambda}\right).$$

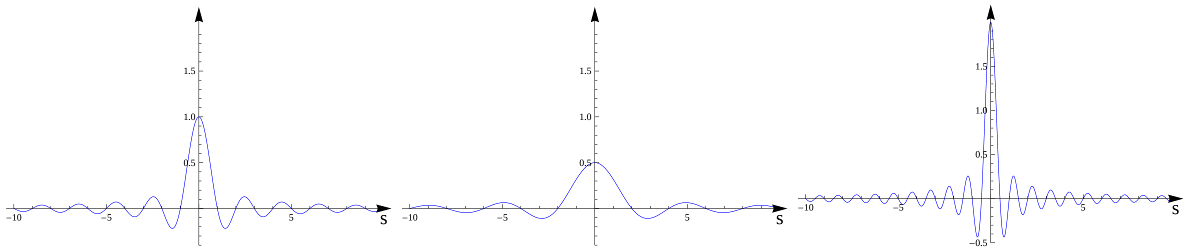
S pomočjo pravila o raztegu dobimo

$$\mathcal{F}(g)(s) = \frac{1}{\lambda}\frac{\sin\left(\pi\frac{s}{\lambda}\right)}{\pi\frac{s}{\lambda}} = \underline{\underline{\frac{\sin\left(\frac{\pi s}{\lambda}\right)}{\pi s}}}.$$

Za konec si poglejmo še nekaj konkretnih primerov. Na spodnji sliki so narisani grafi funkcij $g(t)$ pri izbiri $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ in $\lambda = \frac{1}{2}$.



Pri $\lambda > 1$ se širina intervala skrči, pri $\lambda < 1$ pa razširi. Pri Fourierovih transformacijah pa pride do ravno obratne situacije. Če se širina intervala funkcije skrči, se njen spekter razširi in obratno.



$\square$

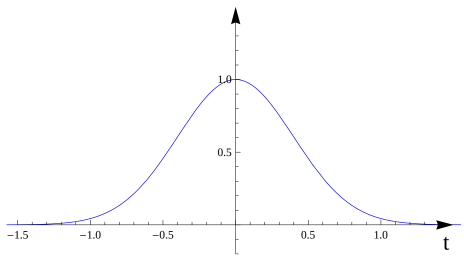
(2) Dana je funkcija $f(t) = e^{-\pi t^2}$.

(a) Pokaži, da velja $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$.

(b) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije f.

(c) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije $g(t) = \cos(6\pi t)e^{-\pi t^2}$.

Rešitev: Funkcija $f(t) = e^{-\pi t^2}$ predstavlja gostoto Gaussove porazdelitve z matematičnim upanjem $\mu = 0$ in pa z varianco $\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}$.



(a) Najprej bomo pokazali, da je funkcija f normalizirana, kar pomeni, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = 1.$$

To bomo pokazali z integracijo funkcije $f(x, y) = e^{-\pi(x^2+y^2)}$ po ravnini. Po eni strani imamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\, dt\right)^2.$$

Po drugi strani pa z uvedbo polarnih koordinat dobimo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\, dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r\, dr.$$

Če uvedemo novo spremenljivko $t = \pi r^2$, dobimo $dt = 2\pi r\, dr$ in

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy = 2\pi \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r\, dr = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1.$$

Ker je Gaussova funkcija pozitivna, od tod sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = 1.$$

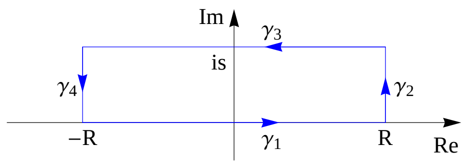
(b) Sedaj nas zanima Fourierova transformacija

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i s t}\, dt.$$

Najprej lahko izraz poenostavimo v

$$\mathcal{F}(f)(s) = e^{-\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+is)^2}\, dt.$$

S pomočjo kompleksne integracije bomo pokazali, da je integral na desni enak 1. Integrirali bomo funkcijo $f(z) = e^{-\pi z^2}$ po poti $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, ki tvori rob pravokotnika.



Ker je funkcija f analitična, je njen integral po poti γ enak nič

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Ta integral sestoji iz štirih kosov. Stranici γ_2 in γ_4 lahko parametriziramo s predpisoma $z = \pm R + iy$ za $y \in [0, s]$. Od tod dobimo oceno

$$|f(z)| = |e^{-\pi z^2}| = |e^{-\pi(R^2 \pm 2iRy - y^2)}| = e^{-\pi(R^2 - y^2)}.$$

Ko pošljemo $R \to \infty$, gre integrand enakomerno proti 0, zato sta v limiti prispevka po poteh γ_2 in γ_4 enaka nič. Integral po poti γ_1 konvergira k integralu Gaussove funkcije, integral po poti γ_3 pa k negativni vrednosti integrala, ki ga želimo izračunati. Od tod sledi

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\, dt + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-\pi(t+is)^2}\, dt$$

in

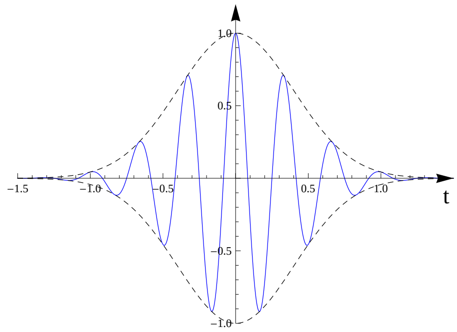
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+is)^2}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = 1.$$

Rezultat je torej

$$\mathcal{F}(f)(s) = e^{-\pi s^2},$$

kar pomeni, da Fourierova transformacija ohranja Gaussovo funkcijo $f(t) = e^{-\pi t^2}$.

(c) Izračunajmo sedaj Fourierovo transformacijo funkcije $g(t) = \cos(6\pi t)\, e^{-\pi t^2}$. Funkcijo g si lahko predstavljamo kot signal s frekvenco 3Hz, ki je skoncentriran v majhnem časovnem obdobju okoli $t = 0$.



Za izračun Fourierove transformacije funkcije g bomo uporabili:

Pravilo faznega pomika:

Naj bo funkcija g definirana s predpisom $g(t) = e^{2\pi iat} f(t)$ za nek $a \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\mathcal{F}(g)(s) = \mathcal{F}(f)(s-a).$$

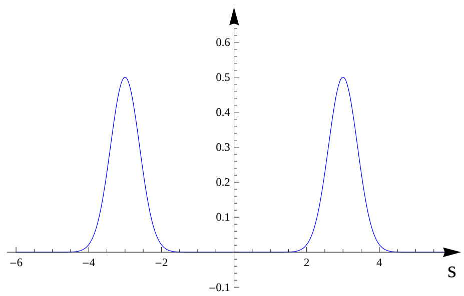
Ker je $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, lahko v našem primeru pišemo

$$g(t) = \cos(6\pi t)e^{-\pi t^2} = \frac{e^{6\pi it} + e^{-6\pi it}}{2} \cdot e^{-\pi t^2}$$

Z dvakratno uporabo pravila o faznem pomiku za $a = \pm 3$ dobimo

$$\mathcal{F}(g)(s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(f)(s-3) + \mathcal{F}(f)(s+3)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(e^{-\pi(s-3)^2} + e^{-\pi(s+3)^2}\right)}}.$$

Spekter funkcije g je skoncentriran v okolici točk $s = \pm 3$.



□

(3) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, danih s predpisi $f_n(t) = ne^{-\pi n^2 t^2}$.

(a) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije $f(t) = e^{-a^2 t^2}$.

(b) Izračunaj limito $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)$.

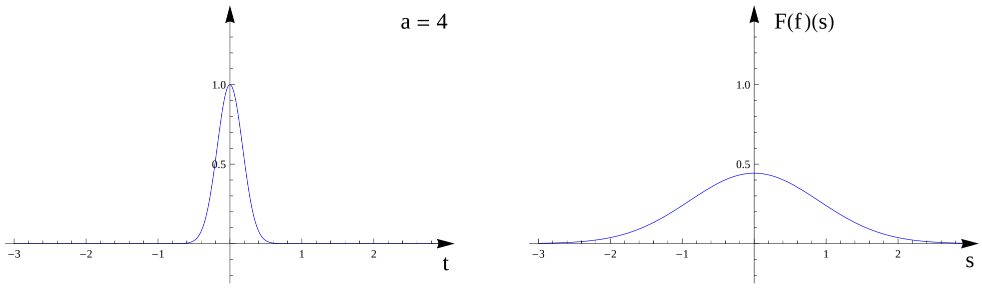
Rešitev: (a) Za izračun Fourierove transformacije funkcije $f(t) = e^{-a^2t^2}$ lahko uporabimo pravilo raztega. Če definiramo $h(t) = e^{-\pi t^2}$, je

$$f(t) = h\left(\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}t\right).$$

Od tod z uporabo pravila o raztegu dobimo

$$\mathcal{F}(f)(s) = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}} h\left(\frac{s}{\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}}\right) = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-\frac{\pi^2}{a^2}s^2}}}.$$

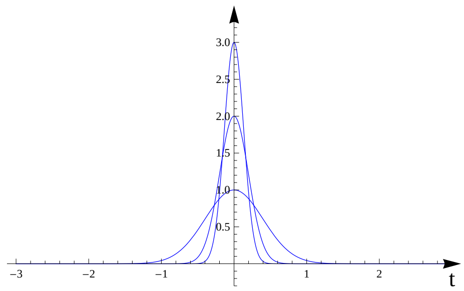
Vidimo, da je Fourierova transformacija Gaussove funkcije spet Gaussova funkcija. Če je prvotna funkcija skoncentrirana, se njen spekter raztegne in obratno.



(b) Zaporedje Gaussovih funkcij

$$f_n(t) = ne^{-\pi n^2 t^2}$$

je izbrano tako, da je ploščina lika pod vsako izmed njih enaka 1.



Ko n raste, so grafi funkcij f_n čedalje bolj skoncentrirani okoli izhodišča, njihove začetne vrednosti pa so $f_n(0) = n$. Po točkah zaporedje (f_n) konvergira k funkciji

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t \neq 0, \\ \infty & ;\ t = 0. \end{cases}$$

S stališča uporabe ta limitna funkcija ni zanimiva. Precej bolj uporabna pa je limita zaporedja (f_n) v kontekstu posplošenih funkcij oziroma distribucij. Rečemo ji Diracova delta funkcija, neformalno pa jo lahko opišemo z lastnostima:

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t \neq 0, \\ \infty & ;\ t = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)\, dt = 1.$$

Fourierova transformacija funkcije f_n je enaka

$$\mathcal{F}(f_n)(s) = n\sqrt{\frac{\pi}{\pi n^2}} e^{-\frac{\pi^2}{\pi n^2}s^2} = e^{-\frac{\pi s^2}{n^2}}.$$

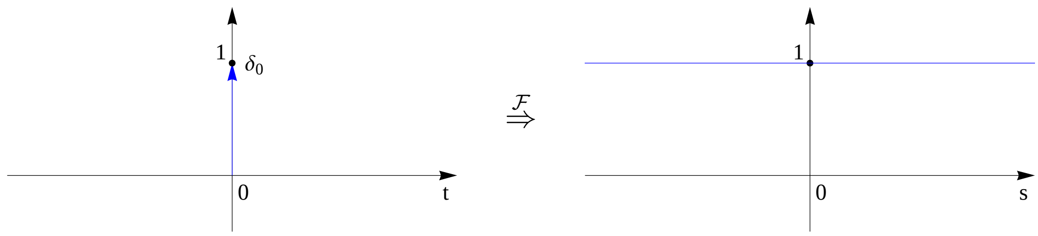
V limiti tako dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(f_n)(s) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\pi s^2}{n^2}} = 1.$$

Od tod sledi, da je

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1.$$

Graf delta funkcije δ_0 predstavimo z navpično puščico dolžine 1.



V splošnem delta funkcijo $\lambda\delta_a$ predstavimo z navpično puščico iz točke $(a, 0)$ ter z višino λ. Z uporabo inverzne Fourierove transformacije in upoštevanjem, da je konstantna funkcija soda, od tod dobimo še

$$\mathcal{F}(1) = \delta_0.$$

□

(4) Izračunaj Fourierove transformacije:

(a) funkcije $g(t) = e^{2\pi iat}$ za $a \in \mathbb{R}$,

(b) funkcij $g(t) = \cos(2\pi at)$ in $g(t) = \sin(2\pi at)$ za $a \in \mathbb{R}$,

(c) delta funkcije δ_a za $a \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Pri računanju Fourierovih transformacij bomo privzeli, da je:

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1,$$
$$\mathcal{F}(1) = \delta_0$$

ter uporabili pravili navadnega in faznega pomika:

$$\mathcal{F}(f(t-a))(s) = e^{-2\pi ias}\mathcal{F}(f)(s),$$
$$\mathcal{F}(e^{2\pi iat} f(t)) = \mathcal{F}(f)(s-a).$$

(a) Za izračun Fourierove transformacije funkcije $g(t) = e^{2\pi iat}$ bomo uporabili pravilo faznega pomika pri izbiri $f(t) = 1$. Tako dobimo

$$\mathcal{F}(e^{2\pi iat}) = \mathcal{F}(e^{2\pi iat}\cdot 1) = \mathcal{F}(f)(s-a) = \delta_0(s-a) = \delta_a.$$

Vidimo, da je spekter kompleksne eksponentne funkcije skoncentriran v eni točki.

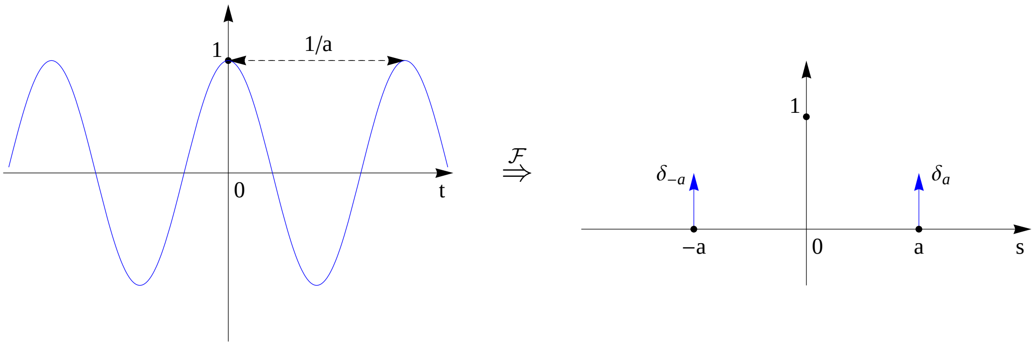
(b) S pomočjo rezultata za kompleksne eksponentne funkcije lahko sedaj izračunamo tudi Fourierovo transformacijo sinusa in kosinusa. Spomnimo se, da velja:

$$\cos(2\pi at) = \tfrac{1}{2}\left(e^{2\pi iat} + e^{-2\pi iat}\right),$$
$$\sin(2\pi at) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{2\pi iat} - e^{-2\pi iat}\right).$$

Od tod zaradi linearnosti Fourierove transformacije sledi:

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi at)) = \tfrac{1}{2}\left(\delta_a + \delta_{-a}\right),$$
$$\mathcal{F}(\sin(2\pi at)) = \tfrac{1}{2i}\left(\delta_a - \delta_{-a}\right).$$

Spekter funkcije $g(t) = \cos(2\pi at)$ lahko ponazorimo z naslednjim grafom.



Ker pride Fourierova transformiranka v splošnem kompleksna (tudi če je funkcija realna), ponavadi pri skiciranju spektra narišemo funkcijo $|\mathcal{F}(f)|$ ali pa $|\mathcal{F}(f)|^2$. V tem primeru bi spektru sinusa pripadal enak graf kot spektru kosinusa, kompleksni faktor, v katerem se razlikujeta, pa tolmačimo kot razliko v fazi med sinusom in kosinusom.

(c) Za izračun poljubne delta funkcije najprej opazimo, da velja

$$\delta_a(t) = \delta_0(t-a).$$

Z uporabo pravila o navadnem pomiku od tod dobimo

$$\mathcal{F}(\delta_a)(s) = e^{-2\pi ias}.$$

Opomba 1: Na klasičen način lahko Fourierovo transformacijo

$$\mathcal{F}(f)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi ist}\,dt,$$

definiramo le za funkcije, za katere obstaja $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$. Veliko pa je zanimivih primerov funkcij, za katere Fourierova transformacija v tem smislu ne obstaja. Pri tem imamo v mislih predvsem polinome, trigonometrične funkcije in pa periodične funkcije.

Smiselno in bistroumno razširitev Fourierove teorije na razred t.i. umirjenih distribucij je definiral Laurent Schwartz. Njegova teorija je hkrati posplošitev teorije Fourierovih vrst in pa klasične teorije Fourierove transformacije.

V nadaljevanju bomo pogledali, kako se z distribucijami računa, za natančno poznavanje vseh pojmov pa bi potrebovali še precej teoretičnega predznanja.

Najprej definiramo Schwartzov razred hitro padajočih funkcij

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^n \phi^{(m)}(t)| < \infty, \forall \text{m,n}\}.$$

To so gladke funkcije, ki imajo lastnost, da vsi njihovi odvodi padajo hitreje proti nič kot poljuben polinom. Kot primer lahko vzamemo npr. Gaussove funkcije. Za samo računanje z distribucijami ni toliko važna dejanska oblika teh funkcij kot pa lastnost, preko katere so definirane.

Distribucija (posplošena funkcija) je po definiciji zvezen linearni funkcional $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$. Distribucija torej vsaki hitro padajoči funkciji priredi neko kompleksno število na zvezen in linearen način. Tipična razreda distribucij, ki se pogosto uporabljata, sta:

(a) Delta funkcije:

$$\begin{aligned} \langle \delta_0, \phi \rangle &= \phi(0), \\ \langle \delta_a, \phi \rangle &= \phi(a) \quad \text{za } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Lokalno integrabilne funkcije s kvečjemu polinomsko rastjo (polinomi, trigonometrične funkcije, omejene zvezne funkcije, periodične funkcije):

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\,dt.$$

Fourierova transformacije umirjene distribucije je definirana implicitno s predpisom

$$\langle \mathcal{F}(f), \phi \rangle = \langle f, \mathcal{F}(\phi) \rangle\,,$$

ki mora veljati za vsak $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Poglejmo najprej, kako se transformirajo delta funkcije.

$$\langle \mathcal{F}(\delta_0), \phi \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \mathcal{F}(\phi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \phi(t)\,dt = \langle 1, \phi \rangle\,.$$

Od tod sledi

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1.$$

Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ imamo

$$\langle \mathcal{F}(\delta_a), \phi \rangle = \langle \delta_a, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \mathcal{F}(\phi)(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i a t}\phi(t)\,dt = \left\langle e^{-2\pi i a s}, \phi \right\rangle,$$

od koder dobimo

$$\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2\pi i a s}.$$

Vidimo, da Fourierova transformacija preslika delta funkcije v kompleksne eksponentne funkcije. V naslednjih dveh primerih bomo videli, da bolj ali manj velja tudi obrat tega rezultata.

$$\langle \mathcal{F}(1), \phi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\phi)(t)\,dt = \big(\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\phi)\right)\big)(0) = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle\,.$$

Dobimo

$$\mathcal{F}(1) = \delta_0.$$

Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ pa je

$$\left\langle \mathcal{F}(e^{2\pi i a t}), \phi \right\rangle = \left\langle e^{2\pi i a t}, \mathcal{F}(\phi) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i a t}\mathcal{F}(\phi)(t)\,dt = \big(\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\phi)\right)\big)(a) = \langle \delta_a, \phi \rangle\,,$$

od koder sledi

$$\mathcal{F}(e^{2\pi i a t}) = \delta_a.$$

Opomba 2: Za nobeno izmed funkcij, ki smo jih obravnavali pri tej nalogi, ne moremo definirati Fourierove transformacije na klasičen način. Veljata pa naslednji dejstvi:

(a) Če za funkcijo f obstaja Fourierova transformacija v klasičnem smislu, dobimo v distribucijskem smislu enak rezultat, kot če bi šli računat izlimitirani integral.

(b) Če pa imamo periodično funkcijo f, dobimo za rezultat vsoto delta funkcij, skaliranih s faktorji, ki jih dobimo pri razvoju funkcije f v kompleksno Fourierovo vrsto.

$\square$

(5) Dana je funkcija

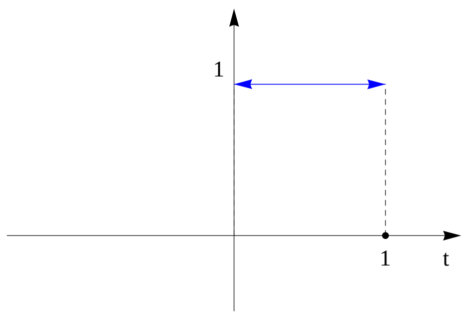
$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 < t < 1, \\ 0 & ; \text{sicer}. \end{cases}$$

Izračunaj konvolucijo $f * f$.

Rešitev: Naj bosta f in g absolutno integrabilni funkciji, ki slikata iz realnih števil v kompleksna števila (torej obstajata integrala $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ in $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$). Konvolucija funkcij f in g je definirana s predpisom

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)\, du.$$

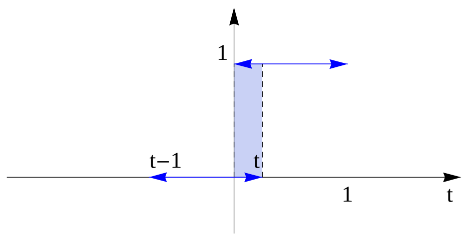
Poglejmo najprej graf funkcije f.



Računajmo

$$(f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)\, du = \int_0^1 f(t-u)\, du \overset{t-u=v}{=} \int_{t-1}^{t} f(v)\, dv.$$

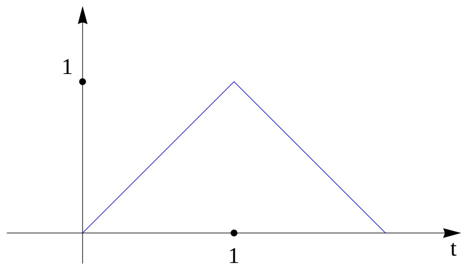
Pri fiksnem t je ta integral enak dolžini intervala $[t-1, t] \cap [0, 1]$. Presek teh dveh intervalov je prazen za $t < 0$ in $t > 2$. Za $0 \le t \le 1$ dolžina preseka linearno raste od 0 do 1, nato pa za $1 \le t \le 2$ linearno pada od 1 do 0.



Tako dobimo

$$(f * f)(t) = \begin{cases} t & ;\ 0 \le t \le 1, \\ 2 - t & ;\ 1 \le t \le 2, \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Poglejmo si še graf funkcije $f * f$.



$\square$

(6) Dana je družina Gaussovih funkcij $f_a(t) = e^{-a^2t^2}$ za $a > 0$. Izračunaj konvolucijo $f_a * f_b$.

Rešitev: Za izračun konvolucije Gaussovih funkcij bomo uporabili izrek o konvoluciji

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g),$$

ki pravi, da Fourierova transformacija pretvarja konvolucijski produkt funkcij v običajen produkt funkcij. Če upoštevamo, da velja

$$\mathcal{F}(f_a)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-\frac{\pi^2}{a^2}s^2},$$

dobimo

$$\mathcal{F}(f_a * f_b)(s) = \mathcal{F}(f_a)(s)\mathcal{F}(f_b)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} e^{-\frac{\pi^2}{a^2}s^2} \sqrt{\frac{\pi}{b^2}} e^{-\frac{\pi^2}{ab2}s^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{ab} e^{-\pi^2 s^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}.$$

Če na zgornji enakosti sedaj uporabimo $\mathcal{F}^{-1}$ in upoštevamo, da se za sode funkcije $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}^{-1}$ ujemata, dobimo

$$(f_a * f_b)(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{ab} e^{-\pi^2 s^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\right)(t) = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\pi}{a^2+b^2}} e^{-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}t^2}}}.$$

$\square$

(7) Naj bo $f(t) = \begin{cases} 1 & ; |t| < 1, \\ 0 & ; |t| \geq 1. \end{cases}$

(a) Izračunaj funkcijo, ki jo dobimo, če funkcijo f filtriramo s sinc filtrom $h(t) = \frac{\sin(\lambda \pi t)}{\pi t}$.

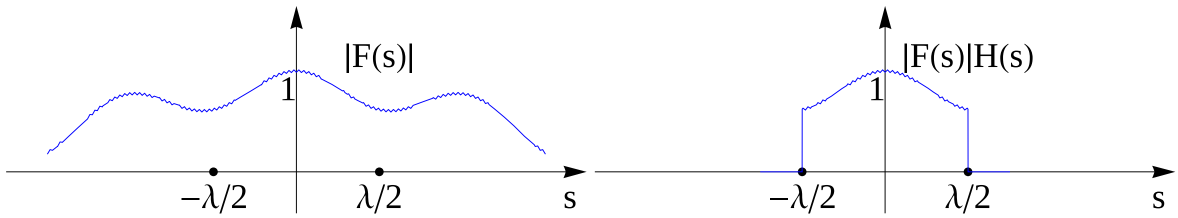
(b) Izračunaj funkcijo, ki jo dobimo, če f filtriramo z Gaussovim filtrom $g(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 t^2}$.

Rešitev: Naj bo $f(t)$ signal in $F(s)$ njegova Fourierova transformacija. Zanima nas, kaj se zgodi s signalom, če iz njegove Fourierove transformiranke strogo odrežemo vse frekvence, ki so večje od neke frekvence $\frac{\lambda}{2}$. To pomeni, da signal $F(s)$ transformiramo v frekvenčni domeni v

$$H(s)F(s),$$

kjer je

$$H(s) = \begin{cases} 1 & ; |s| < \frac{\lambda}{2}, \\ 0 & ; |s| \geq \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$



Če sedaj na funkciji $H(s)F(s)$ uporabimo inverzno Fourierovo transformacijo, dobimo

$$f_{filtr} = h * f.$$

Nizkopasovna filtracija signala torej ustreza konvoluciji signala z ustrezno skalirano sinc funkcijo. Podobno idejo lahko uporabimo tudi pri filtracijah signala z Gaussovo funkcijo.

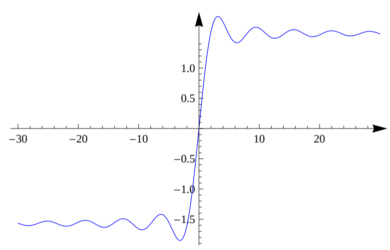
(a) Pri filtraciji s sinc filtrom dobimo:

$$\begin{aligned} f_{filtr}(t) = (h * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) f(u)\, du = \int_{-1}^{1} \frac{\sin(\lambda\pi(t-u))}{\pi(t-u)}\, du, \\ &\stackrel{\lambda\pi(t-u)=x}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda\pi(t-1)}^{\lambda\pi(t+1)} \frac{\sin x}{x}\, dx, \\ &= \frac{1}{\pi}\big(\mathrm{Si}(\lambda\pi(t+1)) - \mathrm{Si}(\lambda\pi(t-1))\big). \end{aligned}$$

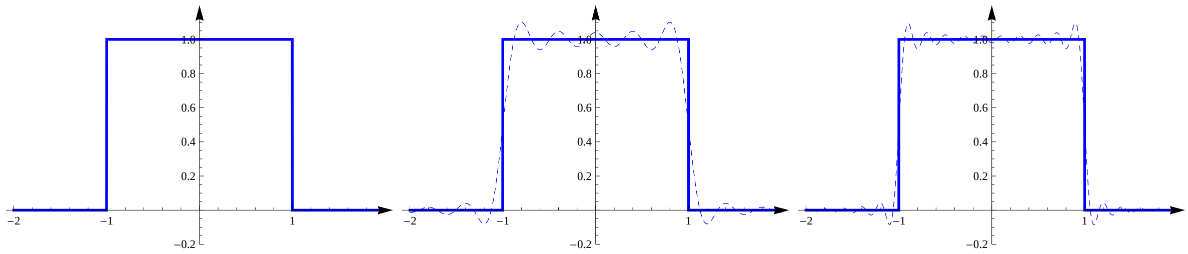
Rezultat smo izrazili s pomočjo funkcije

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du,$$

ki se imenuje integralski sinus. Funkcija Si je liha, limiti pri $x \to \pm\infty$ pa sta $\pm\frac{\pi}{2}$. Poglejmo še njen graf.



Na sliki so prikazani grafi funkcij f in pa filtriranih funkcij pri vrednostih $\lambda = 5$ in $\lambda = 10$.



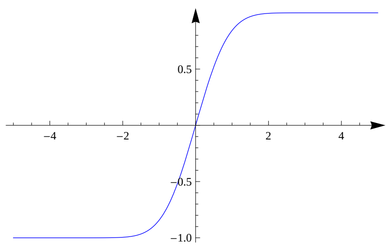
(b) Pri filtraciji z Gaussovim filtrom gre pravzaprav za glajenje funkcije f. Tako dobimo:

$$
\begin{aligned}
f_{filtr}(t) = (g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u) f(u)\, du &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-a^2(t-u)^2}\, du, \\
&\overset{a(t-u)=x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a(t-1)}^{a(t+1)} e^{-x^2}\, dx, \\
&= \frac{1}{2}\big(\operatorname{erf}(a(t+1)) - \operatorname{erf}(a(t-1))\big).
\end{aligned}
$$

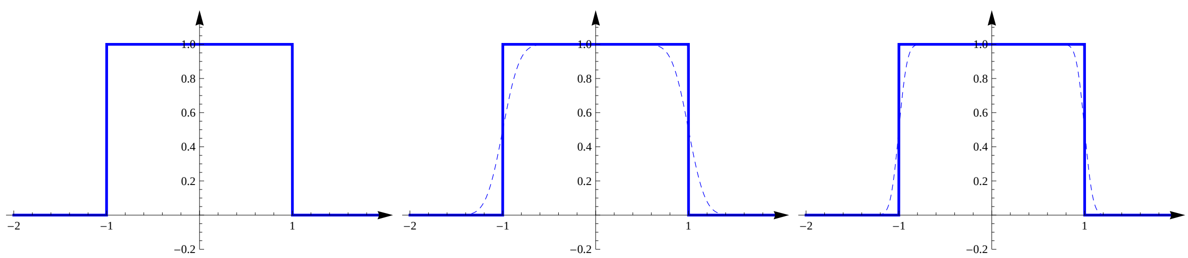
Tokrat smo rezultat izrazili s funkcijo

$$
\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2}\, du,
$$

ki se imenuje Gaussova funkcija napake. Je liha funkcija, limiti pri $x \to \pm\infty$ pa sta ± 1.



Na sliki so prikazani grafi funkcij f in pa filtriranih funkcij pri vrednostih $a = 5$ in $a = 10$.



$\square$