Izbrana poglavja iz matematike
2. sklop nalog

Fourierova vrsta

(1) Razvij funkcijo $f(x) = e^{\lambda x}$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev: Vsaki odsekoma zvezno odvedljivi funkciji f na intervalu $[-\pi, \pi]$ lahko priredimo Fourierovo vrsto:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$
$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Zgoraj je realna oblika, spodaj pa kompleksna oblika Fourierove vrste. Koeficienti so določeni z integrali:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx,$$
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Izračunajmo najprej koeficiente Fourierove vrste v kompleksni obliki:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x}\, dx = \frac{1}{2\pi\lambda} e^{\lambda x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi\lambda}(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}) = \underline{\underline{\frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}}},$$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\lambda - ik)x}\, dx = \frac{1}{2\pi(\lambda - ik)} e^{(\lambda - ik)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}, \\
&= \frac{1}{2\pi(\lambda - ik)} \left(e^{(\lambda - ik)\pi} - e^{-(\lambda - ik)\pi}\right) = \frac{1}{2\pi(\lambda - ik)} \left(e^{\lambda\pi} e^{-ik\pi} - e^{-\lambda\pi} e^{ik\pi}\right), \\
&= \frac{(-1)^k}{2\pi(\lambda - ik)} \left(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}\right) = \underline{\underline{\frac{(-1)^k(\lambda + ik)}{\pi(\lambda^2 + k^2)} \operatorname{sh}(\lambda\pi)}}.
\end{aligned}$$

Spomnimo se, da je hiperbolični sinus definiran s predpisom

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Vidimo, da je formula za splošen k veljavna tudi v primeru, ko je $k = 0$. Ker je funkcija f odvedljiva, za vsak $x \in (-\pi, \pi)$ velja

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k(\lambda + ik)}{\lambda^2 + k^2} e^{ikx}.}}$$

Če je funkcija f realna, veljajo med koeficienti Fourierove vrste v realni in v kompleksni obliki naslednje zveze:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \\ a_n &= 2\,\mathrm{Re}(c_n), \\ b_n &= -2\,\mathrm{Im}(c_n), \end{aligned}$$

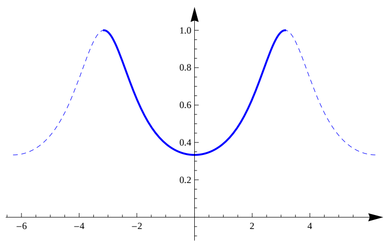
ki veljajo za vse $n \geq 1$. Poleg tega velja še $c_{-n} = \overline{c_n}$. Z uporabo teh zvez lahko izračunamo tudi koeficiente Fourierove vrste funkcije f v realni obliki:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}, \\ a_n &= \frac{2(-1)^n\lambda}{\pi(\lambda^2+n^2)}\,\mathrm{sh}(\lambda\pi), \\ b_n &= \frac{2(-1)^{n+1}n}{\pi(\lambda^2+n^2)}\,\mathrm{sh}(\lambda\pi). \end{aligned}$$

$\square$

(2) Razvij funkcijo $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev: Funkcija $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ je periodična trigonometrična funkcija.



Koeficienti pri razvoju v kompleksno obliko Fourierove vrste so enaki

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x} e^{-ikx}\,dx.$$

Za splošen k bi imeli kar precej težav z računanjem nedoločenega integrala, zato bomo raje spoznali metodo za računanje določenih integralov trigonometričnih funkcij, ki temelji na kompleksni integraciji.

Denimo, da je $\tilde{f}$ neka holomorfna funkcija in izračunajmo njen integral po enotski krožnici $|z| = 1$. Za parametrizacijo vzemimo $\gamma(t) = e^{it}$ za $t \in [0, 2\pi]$. Zaradi periodičnosti funkcije e^{it} tako dobimo

$$\int_K \tilde{f}(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{it}) \cdot ie^{it}\,dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(e^{it})e^{it}\,dt.$$

Naš cilj bo najti takšno funkcijo $\tilde{f}$, da se bo ta integral ujemal z zgornjim integralom. Računajmo

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\cos x} e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{i\pi}\cdot i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-i(k+1)x}}{4+e^{ix}+e^{-ix}} e^{ix}\,dx.$$

Če označimo $z = e^{ix}$, lahko izraz v integralu prepišemo v obliko

$$\frac{e^{-i(k+1)x}}{4+e^{ix}+e^{-ix}} = \frac{z^{-(k+1)}}{4+z+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^k(z^2+4z+1)}.$$

Z izbiro funkcije $\tilde{f}(z) = \frac{1}{z^k(z^2+4z+1)}$ torej pridemo do enakosti

$$c_k = \frac{1}{i\pi}\int_K \tilde{f}(z)\,dz.$$

Ta integral bomo izračunali z uporabo izreka o residuih. V formuli je zaenkrat k poljubno celo število. Ker pa je f soda funkcija, velja $c_k = c_{-k}$, zato se lahko omejimo samo na negativna števila oblike $k = -n$ za nek $n \geq 0$. V tem primeru dobimo

$$\tilde{f}(z) = \frac{z^n}{z^2+4z+1},$$

kar pomeni, da ima funkcija $\tilde{f}$ dva pola reda ena v točkah

$$z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Znotraj enotske krožnice leži samo pol $z_1 = -2+\sqrt{3}$, v katerem ima funkcija $\tilde{f}$ residuum

$$\operatorname{Res}(\tilde{f}, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)z^n}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\frac{z^n}{z+2+\sqrt{3}} = \frac{(-2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$$

Od tod dobimo formulo

$$c_{-n} = \frac{1}{i\pi}\int_K \tilde{f}(z)\,dz = \frac{1}{i\pi}\cdot 2\pi i\frac{(-2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} = \frac{(-2+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}},$$

ki velja za vse $n \geq 0$. Zaradi sodosti funkcije f pa od tod avtomatično sledi še:

$$\begin{aligned} c_n &= c_{-n}, \\ a_n &= \frac{2(-2+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ker je funkcija $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$ periodična in odvedljiva, torej za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\frac{1}{2+\cos x} = \underline{\underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-2+\sqrt{3})^{|k|}}{\sqrt{3}}e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-2+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}\cos(nx).}}$$

□

(3) Razvij funkcijo $f(x) = x$ v Fourierovo kosinusno vrsto na intervalu $[0, L]$.

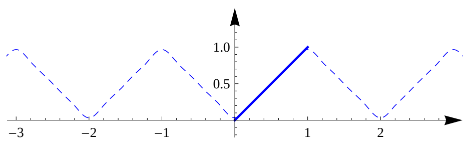
Rešitev: Naj bo f odsekoma zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[0, L]$. Poleg razvoja funkcije f po sinusih in kosinusih hkrati lahko funkcijo f razvijemo tudi samo po sinusih ali pa samo po kosinusih. Če označimo $\omega = \frac{\pi}{L}$, je

Fourierova kosinusna vrsta:

- $S_c(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x)$,
- $a_0 = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x)\, dx$,
- $a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \cos(n\omega x)\, dx$.

Dobljeno vrsto smatramo kot sodo periodično razširitev funkcije f.

Soda periodična razširitev funkcije f ima obliko trikotnega vala.



Računajmo:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L x\, dx = \frac{2}{L} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \underline{\underline{L}}.$$

V naslednjem računu bomo večkrat upoštevali, da je $\omega L = \pi$.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\omega x)\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos(n\omega x)\, dx, \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{1}{n\omega} x \sin(n\omega x)\Big|_0^L - \frac{1}{n\omega} \int_0^L \sin(n\omega x)\, dx \right), \\
&= \frac{2}{L} \left(\frac{L \sin(n\omega L)}{n\omega} + \frac{1}{n^2\omega^2} \cos(n\omega x)\Big|_0^L \right), \\
&= \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{n^2\omega^2} \left(\cos(n\pi) - 1\right), \\
&= \underline{\underline{\frac{2L}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1\right)}}.
\end{aligned}$$

Fourierova kosinusna vrsta funkcije f je tako enaka

$$S_c(x) = \underline{\underline{\frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}}.$$

$\square$

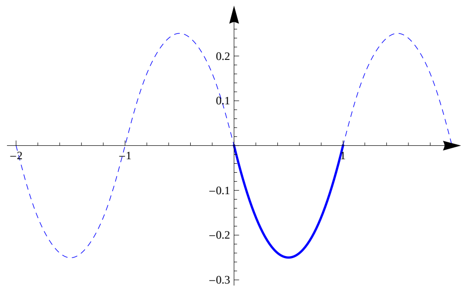
(4) Razvij funkcijo $f(x) = x^2 - x$ v Fourierovo sinusno vrsto na intervalu $[0, 1]$.

Rešitev: Odsekoma zvezno odvedljivo funkcijo f na intervalu $[0, L]$ lahko razvijemo tudi po sinusih. Če pišemo $\omega = \frac{\pi}{L}$, je

<u>Fourierova sinusna vrsta</u>:

- $S_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$,
- $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega x)\, dx$.

Dobljeno vrsto smatramo kot liho periodično razširitev dane funkcije.



V našem primeru je $L = 1$ in $\omega = \pi$, od koder sledi:

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x)\, dx = 2\left(-\frac{1}{n\pi}(x^2 - x)\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (2x-1)\cos(n\pi x)\, dx\right), \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{1}{n\pi}(2x-1)\sin(n\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)\, dx\right) = \frac{4}{n^3\pi^3}\cos(n\pi x)\Big|_0^1, \\
&= \frac{4}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1).
\end{aligned}
$$

Fourierova sinusna vrsta funkcije f je torej

$$
S_s(x) = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1)\sin(n\pi x).}}
$$

□