Izbrana poglavja iz matematike
1. sklop nalog

Kompleksna števila

(1) Izračunaj s pomočjo de Moivrove formule naslednji kompleksni števili:

(a) $z = (1 + i\sqrt{3})^{42}$,

(b) $z = \dfrac{1}{(1+i)^8}$.

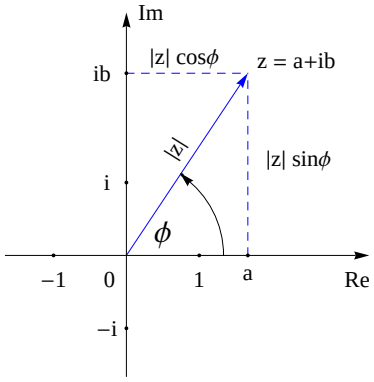
Rešitev: Poleg kartezičnega zapisa kompleksnega števila $z = a + ib$ nam pri računanju pogosto prideta prav polarni zapis

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

in pa Eulerjev zapis

$$z = |z|e^{i\phi},$$

kjer je $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ absolutna vrednost, ϕ pa argument (polarni kot) števila z.



Pri polarnem in Eulerjevem zapisu gre v bistvu za isto stvar, saj velja Eulerjeva formula

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

S pomočjo de Moivrove formule lahko računamo potence kompleksnih števil. Če je namreč $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = |z|^n e^{in\phi}.$$

(a) Pišimo $w = 1 + i\sqrt{3}$. Potem je $|w| = 2$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$. Po de Moivrovi formuli sledi

$$z = w^{42} = 2^{42}\left(\cos\frac{42\pi}{3} + i\sin\frac{42\pi}{3}\right) = 2^{42}.$$

(b) Naj bo sedaj $w = 1 + i$. Potem je $|w| = \sqrt{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ in

$$z = \frac{1}{w^8} = \frac{1}{16\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right)} = \frac{1}{16}.$$

$\square$

(2) Reši v obsegu kompleksnih števil dani enačbi in nato skiciraj množici njunih rešitev:

(a) $z^3 = 1$,

(b) $z^4 = i$.

Rešitev: V realnem ima enačba $x^n = a$ za poljuben $a > 0$ ali eno rešitev, če je n lih, ali pa dve rešitvi, če je n sod. V kompleksnem pa ima enačba $z^n = a$ za poljubno neničelno kompleksno število a natanko n različnih rešitev. Posebej pomembne so rešitve enačbe

$$z^n = 1,$$

ki jim rečemo tudi n-ti koreni enote.

(a) Iščemo rešitve enačbe $z^3 = 1$. Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^3 e^{i3\phi} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Vidimo, da je

$$\begin{aligned} |z| &= 1, \\ \phi &= \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

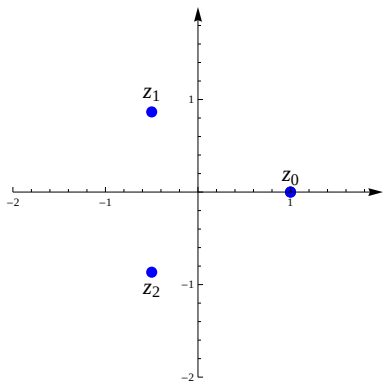
Ker nas zanimajo polarni koti $\phi \in [0, 2\pi)$, pridejo v poštev samo $k \in \{0, 1, 2\}$. Rešitve enačbe so

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \qquad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Eksplicitno so to števila

$$\begin{aligned} z_0 &= 1, \\ z_1 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Geometrijsko so rešitve enačbe $z^3 = 1$ oglišča enakostraničnega trikotnika, ležijo pa na enotski krožnici.



Opomba: Za splošen n tvorijo n-ti koreni enote oglišča enakostraničnega n-kotnika. Eno izmed oglišč je zmeraj $z_0 = 1$. Če je n lih, je to hkrati tudi edini realni koren enačbe $z^n = 1$. Če je n sod, pa je realen še $z_{\frac{n}{2}} = -1$.

(b) Rešimo še enačbo $z^4 = i$. Če pišemo $z = |z|e^{i\phi}$, dobimo

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}.$$

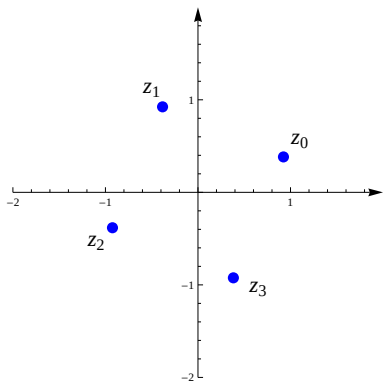
Od tod dobimo

$$\begin{aligned} |z| &= 1, \\ \phi &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Rešitve enačbe so torej

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Rešitve enačbe tokrat tvorijo oglišča kvadrata in ležijo na enotski krožnici. Kvadrat je zavrten za kot $\frac{\pi}{8}$ glede na koordinatne osi.



Opomba: n-te korene kompleksnega števila a lahko dobimo tudi na naslednji način. Če pišemo $a = |a|e^{i\phi}$, je $z_0 = \sqrt[n]{|a|}e^{\frac{i\phi}{n}}$ eden izmed n-tih korenov števila a. Preostale n-te korene dobimo, če z_0 pomnožimo z n-timi koreni enote. Vidimo, da n-ti koreni števila a določajo oglišča enakostraničnega n-kotnika, ki leži na krožnici s središčem v 0 in s polmerom $\sqrt[n]{|a|}$. Glede na standardni n-kotnik korenov enote je ta n-kotnik zavrten za kot $\frac{\phi}{n}$. $\square$

(3) Reši v obsegu kompleksnih števil enačbe:

(a) $z^2 - (1-4i)z - 5 - 5i = 0$,
(b) $(z+i)^4 + (z-i)^4 = 0$,
(c) $e^z = 1$.

Rešitev: (a) Rešujemo kompleksno kvadratno enačbo

$$z^2 - (1-4i)z - 5 - 5i = 0.$$

Podobno kot pri realnih enačbah ima tudi ta enačba dve rešitvi, ki ju lahko izračunamo z uporabo znane formule

$$z_{1,2} = \frac{1-4i \pm \sqrt{(1-4i)^2 + 4(5+5i)}}{2} = \frac{1-4i \pm \sqrt{5+12i}}{2}.$$

Kvadratni koren $\sqrt{5+12i}$ moramo sedaj izračunati v kompleksnem. Iščemo kompleksno število $x+iy$, da bo veljalo:

$$\begin{aligned}(x+iy)^2 &= 5+12i,\\ x^2 - y^2 + 2xyi &= 5+12i.\end{aligned}$$

Tako pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned}xy &= 6,\\ x^2 - y^2 &= 5,\end{aligned}$$

ki ima rešitvi $(3,2)$ in $(-3,-2)$. Od tod sledi, da je

$$\sqrt{5+12i} = \pm(3+2i).$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta torej:

$$\begin{aligned}z_1 &= 2-i,\\ z_2 &= -1-3i.\end{aligned}$$

(b) S pomočjo binomske formule lahko enačbo $(z+i)^4 + (z-i)^4 = 0$ preoblikujemo v obliko

$$z^4 - 6z^2 + 1 = 0.$$

Pišimo sedaj $w = z^2$. Potem je $w^2 - 6w + 1 = 0$, od koder dobimo

$$w_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Sedaj lahko z nekaj spretnosti opazimo, da je

$$3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2.$$

Od tod dobimo vsega skupaj štiri rešitve

$$z \in \left\{\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1, -\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}-1\right\}.$$

(c) Sedaj imamo opravka s transcendentno enačbo $e^z = 1$. Pišimo $z = x+iy$. Sledi

$$e^{x+iy} = 1 \cdot e^{i2k\pi}.$$

Ker sta x in y realni števili, je $|e^{x+iy}| = e^x$, od koder dobimo:

$$\begin{aligned}e^x &= 1,\\ y &= 2k\pi.\end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi, da je $x = 0$. Vse rešitve enačbe $e^z = 1$ so torej

$$z_k = 2\pi i k,$$

za $k \in \mathbb{Z}$. Ker enačba ni polinomska, ima lahko neskončno rešitev. $\square$

(4) Razcepi polinom $p(x) = x^4 + 4$ do kvadratnih, v realnem nerazcepnih faktorjev.

Rešitev: Naš polinom ima realne koeficiente, zato nastopajo morebitne kompleksne ničle v konjugiranih parih. Vsak tak par nam v razcepu določa nerazcepen kvadratni faktor.

Poiščimo najprej ničle polinoma $p(z) = z^4 + 4$. To so ravno rešitve enačbe $z^4 = -4$. Če zapišemo -4 v polarni obliki

$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi),$$

vidimo, da je $|z| = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$ in $\phi_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ za $k = 0, 1, 2, 3$. Torej je

$$z \in \Big\{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\Big\}.$$

Konjugirana para ničel sta torej $\{1 + i, 1 - i\}$ in $\{-1 + i, -1 - i\}$. Sledi

$$z^4 + 4 = (z - (1 + i))(z - (1 - i))(z - (-1 + i))(z - (-1 - i)) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2),$$

oziroma

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

□

(5) Dokaži, da za vsako naravno število $n \geq 2$ veljata enakosti:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 1,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$

Rešitev: Označimo z

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

primitivni n-ti koren enote. Potem za vsak $0 \leq k \leq n$ velja

$$w^k = e^{\frac{2\pi k i}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Če sedaj obe strani zgornje enačbe seštejemo po k od 0 do n, dobimo enakost

$$1 + w + w^2 + \ldots + w^n = \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),$$

s čimer smo računanje vsot trigonometričnih izrazov prevedli na računanje vsote potenc primitivnega korena enote. Ker je $w^n = 1$, je $w^n - 1 = 0$ oziroma

$$(w - 1)(1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1}) = 0.$$

Levi oklepaj ni enak nič, zato mora biti $1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0$. Od tod sledi

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} + w^n = w^n = 1.$$

Primerjava realnih in imaginarnih komponent nam da:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right) = 1,$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\tfrac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

□

(6) Izpelji adicijska izreka za $\cos n\phi$ in $\sin n\phi$.

Rešitev: Poglejmo si za začetek adicijska izreka za $\cos 3\phi$ in $\sin 3\phi$. Iz de Moivrove formule sledi

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^3 = \cos 3\phi + i\sin 3\phi.$$

Če z uporabo binomske formule razvijemo levo stran, dobimo:

$$\begin{aligned}(\cos\phi + i\sin\phi)^3 &= \cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi,\\ &= \cos^3\phi + 3i(1-\sin^2\phi)\sin\phi - 3\cos\phi(1-\cos^2\phi) - i\sin^3\phi,\\ &= \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi + i(3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi).\end{aligned}$$

Primerjava realnih in imaginarnih komponent v de Moivrovi formuli nam pove, da velja:

$$\begin{aligned}\cos 3\phi &= \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi,\\ \sin 3\phi &= 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi.\end{aligned}$$

V primeru poljubnega naravnega števila n pa velja

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}\phi\sin^k\phi$$

Izraz v vsoti bo realen, če je k sodo število in imaginaren, če je k liho število. Torej velja:

$$\begin{aligned}\cos n\phi &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ sod}}}^{n} (-1)^{\frac{k}{2}} \cos^{n-k}\phi\sin^k\phi,\\ \sin n\phi &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ lih}}}^{n} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos^{n-k}\phi\sin^k\phi.\end{aligned}$$

□

(7) Razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$ funkciji ch in sh.

Rešitev: Spomnimo se, da sta hiperbolični kosinus in sinus definirana s predpisoma:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Za razvoj danih funkcij v Taylorjevo vrsto bomo uporabili eksponentno vrsto

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Od tod sledi:

$$\operatorname{ch} z = \frac{(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots) + (1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!} + \dots)}{2} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots,$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots) - (1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3!} + \dots)}{2} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots.$$

Če ti vrsti primerjamo s kosinusno in sinusno vrsto:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots,$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots,$$

vidimo, da sta skoraj identični, le da so predznaki ves čas pozitivni. □

(8) Skiciraj realne in imaginarne komponente zožitev naslednjih holomorfnih funkcij na realno in imaginarno os:

(a) $f(z) = e^z$,
(b) $f(z) = \operatorname{ch} z$ in $f(z) = \operatorname{sh} z$,
(c) $f(z) = \cos z$ in $f(z) = \sin z$.

Rešitev: S pomočjo potenčnih vrst lahko nekatere realne funkcije realne spremenljivke razširimo do kompleksnih funkcij kompleksnih spremenljivk. Tipični primeri so poleg polinomov in racionalnih funkcij še eksponentna, sinusna, kosinusna ali pa na primer Gaussova funkcija. Za funkcijo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rečemo, da je holomorfna v točki $z_0 \in \mathbb{C}$, če obstaja limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

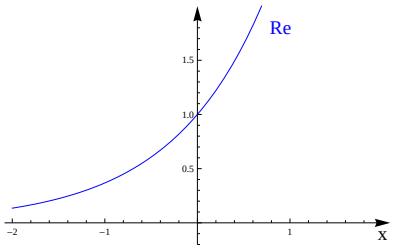
Holomorfne funkcije so torej natanko kompleksno odvedljive funkcije. Za razliko od realne odvedljivosti je kompleksna odvedljivost precej močnejši pogoj. Izkaže se namreč, da je vsaka kompleksno odvedljiva funkcija avtomatično neskončnokrat odvedljiva in celo analitična. Če je torej f kompleksno odvedljiva na nekem območju v kompleksni ravnini, jo lahko lokalno v okolici vsake točke a znotraj območja predstavimo s potenčno vrsto

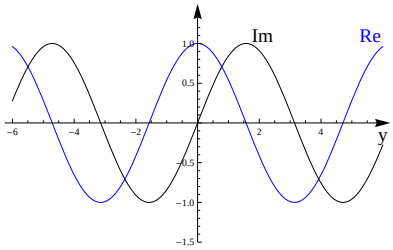
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k.$$

Potenčna vrsta nam tudi pove, kako lahko izračunamo (natančno ali približno) vrednost holomorfne funkcije v kakšni točki.

Graf holomorfne funkcije je ploskev v $\mathbb{C}^2$, zato si ga ne moremo direktno predstavljati. Lahko pa analiziramo komponenti zožitve funkcije na kakšno krivuljo v kompleksni ravnini.

(a) Začeli bomo z analizo eksponentne funkcije $f(z) = e^z$. Realno os lahko parametriziramo s parametrom $x \in \mathbb{R}$, zožitev eksponentne funkcije na realno os pa je realna eksponentna funkcija $f(x) = e^x$. Imaginarna os sestoji iz števil oblike iy, kjer je $y \in \mathbb{R}$. Zožitev eksponentne funkcije na imaginarno os $f(iy) = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ima dve komponenti, ki sta obe omejeni in periodični.





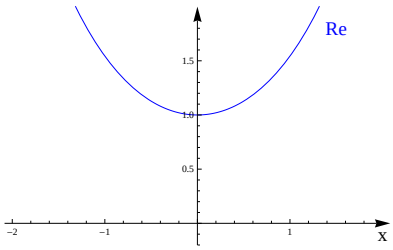
(b) Sedaj si poglejmo hiperbolični kosinus. Njegova zožitev na realno os $f(x) = \operatorname{ch} x$ je soda in neomejena. Na imaginarni osi pa velja

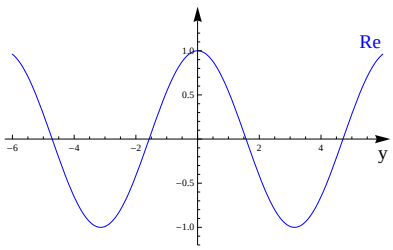
$$\operatorname{ch}(iy) = 1 + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \ldots = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots$$

Na desni prepoznamo vrsto za kosinus, kar pomeni, da velja

$$\operatorname{ch}(iy) = \cos y.$$

Za nas bo zanimiva ta formula samo za $y \in \mathbb{R}$, isti račun pa pokaže, da analogna formula velja za poljubno kompleksno število.





Podobno kot eksponentna funkcija je tudi hiperbolični kosinus omejen in periodičen, če ga zožimo na imaginarno os.

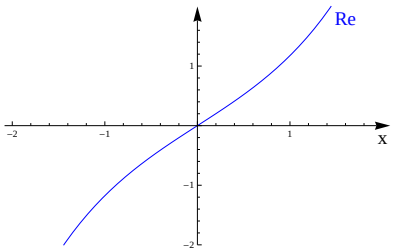
Zožitev hiperboličnega sinusa na realno os je liha in neomejena. Za imaginarna števila pa velja

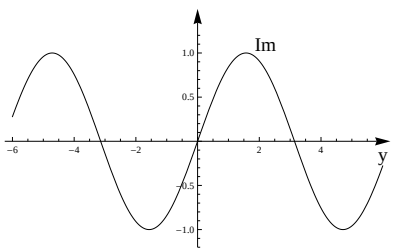
$$\operatorname{sh}(iy) = iy + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \ldots = i(y - \tfrac{y^3}{3!} + \tfrac{y^5}{5!} - \tfrac{y^7}{7!} + \ldots),$$

oziroma

$$\operatorname{sh}(iy) = i \sin y.$$

Tudi ta zveza med hiperboličnim sinusom in sinusom velja za vsako kompleksno število.

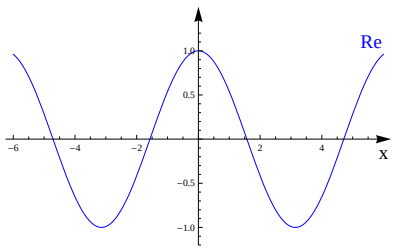


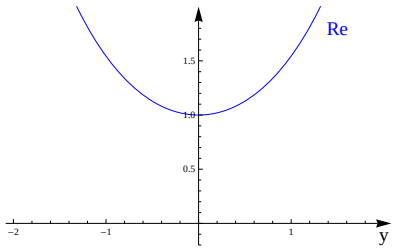


(c) Funkcija kosinus je v realnem omejena in periodična, za imaginarna števila pa lahko iz zgornje formule izpeljemo, da velja

$$\cos(iy) = \operatorname{ch} y.$$

To pomeni, da je kosinus neomejen, če ga zožimo na imaginarno os.

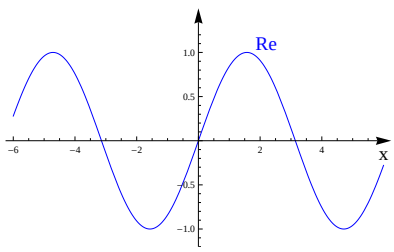


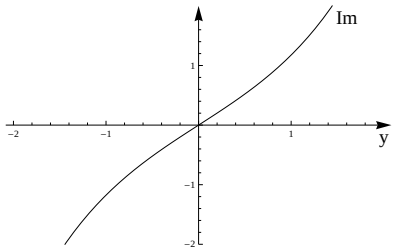


Podobno je tudi sinus v realnem omejen in periodičen, za imaginarna števila pa velja

$$\sin(iy) = i \operatorname{sh} y.$$

Poglejmo še sliki.





□

(9) Skiciraj realno in imaginarno komponento zožitve funkcije $f(z) = z^n$ na enotsko krožnico.

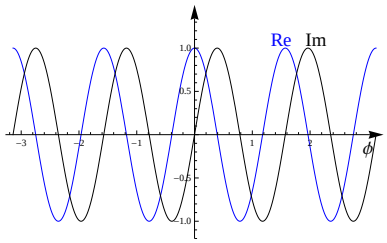
Rešitev: Enotsko krožnico v kompleksni ravnini lahko parametriziramo s predpisom

$$z = e^{i\phi}$$

za $\phi \in [-\pi, \pi]$. Torej velja

$$f(z) = z^n = e^{in\phi} = \cos\phi + i \sin\phi,$$

kar pomeni, da je zožitev potenčne funkcije na enotsko krožnico trigonometrična funkcija.



□

(10) Razvij v Laurentovo vrsto okoli točke $a = 0$ naslednje funkcije:

(a) $f(z) = \dfrac{(z+1)^3}{z^2}$,

(b) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$,

(c) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

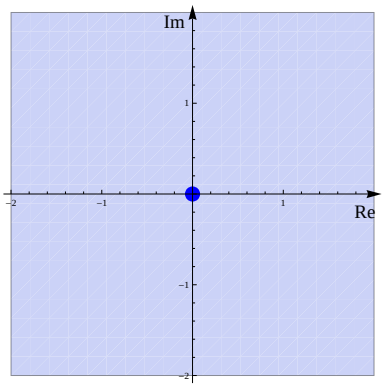
Rešitev: Polinomi, eksponentna funkcija ter sinus in kosinus so defirani za vsa kompleksna števila. Takšnim holomorfnim funkcijam rečemo cele funkcije. Pogosto pa imamo opravka tudi s funkcijami, ki so definirane skoraj povsod, razen v nekaj singularnih točkah. Takšne so recimo racionalne funkcije, ki niso definirane v polih.

V okolici singularnosti lahko holomorfno funkcijo opišemo s posplošitvijo Taylorjeve vrste, ki se ji reče Laurentova vrsta. Če je funkcija f holomorfna na kolobarju $r < |z| < R$, jo lahko tam razvijemo v Laurentovo vrsto oblike

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

Poleg pozitivnih imamo pri Laurentovi vrsti tudi negativne potence, za radija pa dopuščamo tudi možnosti $r = 0$ in $R = \infty$.

(a) Funkcija $f(z) = \frac{(z+1)^3}{z^2}$ je holomorfna na celi kompleksni ravnini, razen v točki $z = 0$. Torej je $r = 0$ in $R = \infty$.

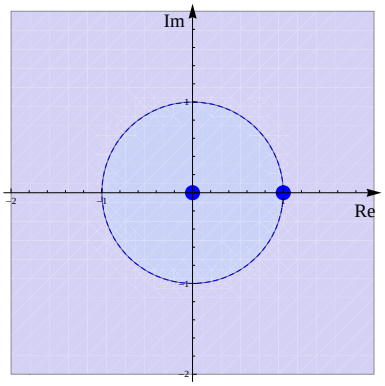


Na območju $0 < |z| < \infty$ je njena Laurentova vrsta enaka

$$f(z) = \frac{(z+1)^3}{z^2} = f(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}{z^2} = z + 3 + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Vidimo, da ima samo končno mnogo členov. Najmanjša potenca, ki nastopa v zgornjem razvoju, je $k = -2$, kar pomeni, da ima funkcija f pri $z = 0$ pol stopnje 2.

(b) Funkcija $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ je holomorfna povsod, razen v točkah $z = 0$ in $z = 1$. Torej lahko izberemo dva kolobarja, na katerih je funkcija f holomorfna. Eden izmed njiju je v bistvu krog brez središča $0 < |z| < 1$, drugi pa zunanjost tega kroga $|z| > 1$.



Najprej si poglejmo območje $0 < |z| < 1$. Tu se Laurentov razvoj funkcije f glasi

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

Pri izračunu smo uporabili formulo za vsoto geometrijske vrste.

Funkcijo f pa lahko razvijemo v Laurentovo vrsto tudi na območju $|z| > 1$. Tam je $|\frac{1}{z}| < 1$, zato s ponovno uporabo formule za geometrijsko vrsto dobimo

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\tfrac{1}{z^2}(1 + \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{z^3} + \ldots) = -\tfrac{1}{z^2} - \tfrac{1}{z^3} - \tfrac{1}{z^4} - \tfrac{1}{z^5} + \ldots$$

Za opis singularnosti funkcije f okoli točke $z = 0$ je bistven Laurentov razvoj na območju $0 < |z| < 1$, ki nam pove, da ima funkcija f v točki $z = 0$ pol stopnje 1.

(c) Funkcija $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ je holomorfna na celi kompleksni ravnini, razen v točki $z = 0$, njen Laurentov razvoj pa je

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{2z^2} + \tfrac{1}{3!z^3} + \ldots$$

Ta razvoj vsebuje neskončno negativnih potenc, kar pomeni, da funkcija f v točki $z = 0$ nima pola, pač pa bistveno singularnost. Razlika med polom in bistveno singularnostjo je sledeča. V okolici pola gredo vrednosti funkcije proti neskončnosti, medtem ko v okolici bistvene singularnosti vrednosti funkcije f zavzamejo skoraj vse vrednosti. Funkcija $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tako v poljubni okolici točke $z = 0$ zavzame vse vrednosti razen 0. □

(11) Določi območje konvergence danih Laurentovih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{3^n z^n} \right),$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n}{z^n} \right),$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n} n!}.$

Rešitev: Vsako holomorfno funkcijo na kolobarju v kompleksni ravnini lahko razvijemo v Laurentovo vrsto. Obratno pa za vsako Laurentovo vrsto

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

obstaja nek kolobar $r < |z| < R$, na katerem vrsta konvergira k neki holomorfni funkciji, izven tega kolobarja pa vrsta divergira. Oba radija lahko izračunamo s pomočjo formul:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$
$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

(a) Vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{1}{3^n z^n}\right)$ ima koeficiente:

$$a_n = 1, \text{ za } n \geq 1,$$
$$a_{-n} = \tfrac{1}{3^n}, \text{ za } n \geq 1.$$

Od tod dobimo:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1,$$
$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tfrac{1}{3^n}} = \tfrac{1}{3},$$

kar pomeni, da vrsta konvergira na kolobarju $\frac{1}{3} < |z| < 1$. Gre za vsoto dveh geometrijskih vrst, zato je vsota te Laurentove vrste racionalna funkcija

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\frac{1}{3z}} = \frac{3z^2 - 6z + 1}{(z-1)(3z-1)}.$$

Ta racionalna funkcija ima pola pri $z = \frac{1}{3}$ in $z = 1$, ki omejujeta območje konvergence Laurentove vrste.

(b) Sedaj imamo vrsto $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n}{z^n}\right)$ s koeficienti:

$$a_n = \tfrac{1}{n!}, \text{ za } n \geq 1,$$
$$a_{-n} = n, \text{ za } n \geq 1.$$

Oba polmera sta v tem primeru:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tfrac{1}{n!}} = 0,$$
$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

kar pomeni, da vrsta konvergira na območju $|z| > 1$. Pozitivni del te vrste se sešteje v eksponentno funkcijo, z nekaj dela pa se da izračunati tudi vsoto negativnih potenc. Izkaže se, da dana Laurentova vrsta na območju $|z| > 1$ konvergira k funkciji

$$f(z) = e^z + \frac{z}{(z-1)^2}.$$

(c) Vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2n} n!}$ nima pozitivnih potenc, zato velja $R = \infty$. Za koeficiente pri negativnih potencah pa velja:

$$a_{-2n} = \tfrac{(-1)^n}{n!},$$
$$a_{-(2n+1)} = 0.$$

Eno stekališče zaporedja ($\sqrt[n]{|a_{-n}|}$) je torej avtomatično 0. Podoben račun kot pri prejšnjem primeru pa pokaže, da tudi sodi členi tega zaporedja konvergirajo proti 0. Torej je $r = 0$, kar pomeni, da dana vrsta konvergira povsod razen pri $z = 0$, njena vsota pa je

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}.$$

$\square$

(12) Izračunaj kompleksne integrale danih funkcij po krivuljah $K_1 : \gamma_1(t) = e^{it}$ za $t \in [0, \pi]$ ter $K_2 : \gamma_2(t) = e^{-it}$ za $t \in [0, \pi]$:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$,

(b) $f(z) = z^n$, $n \geq 0$

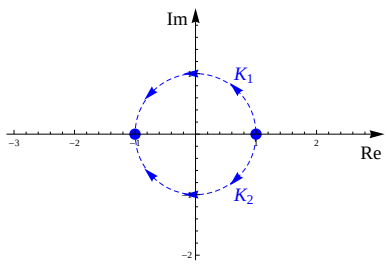
(c) $f(z) = \dfrac{1}{z^k}$, $k > 1$.

Rešitev: Za poljubno krivuljo K v kompleksni ravnini (parametrizirani z $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$) in poljubno holomorfno funkcijo f lahko definiramo kompleksni integral f po K s predpisom

$$\int_K f(z)\, dz = \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Ta integral je v splošnem odvisen od začetne in končne točke ter krivulje, spoznali pa bomo nekaj pravil, ki nam včasih omogočajo izračunati integral, ne da bi zares integrirali.

(a) Krivulji K_1 in K_2 predstavljata zgornji in spodnji del enotske krožnice, začetna in končna točka pa sta 1 in -1.



Začnimo z integralom funkcije $f(z) = \frac{1}{z}$ po krivulji K_1. Ker je $f(\gamma_1(t)) = \frac{1}{e^{it}}$ in $\gamma_1'(t) = ie^{it}$, je dani integral enak

$$\int_{K_1} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\, dt = i \int_0^{\pi} dt = \pi i.$$

Za krivuljo K_2 pa velja $f(\gamma_2(t)) = \frac{1}{e^{-it}}$ in $\gamma_2'(t) = -ie^{-it}$, od koder sledi

$$\int_{K_2} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{-it}} \cdot (-i)e^{-it}\, dt = -i \int_0^{\pi} dt = -\pi i.$$

Vidimo, da se integrala razlikujeta, čeprav imata krivulji isto začetno in končno točko.

(b) Naj bo sedaj $f(z) = z^n$. Na polkrožnici K_1 potem velja $f(z) = e^{int}$, od koder dobimo:

$$\begin{aligned}\int_{K_1} f(z)\,dz &= \int_0^\pi e^{int}\cdot ie^{it}\,dt = i\int_0^\pi e^{i(n+1)t}\,dt = i\int_0^\pi (\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t)\,dt,\\ &= i\left(\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t - \frac{i}{n+1}\cos(n+1)t\right)\Bigg|_0^\pi,\\ &= \frac{1}{n+1}\left((-1)^{n+1}-1\right).\end{aligned}$$

Na polkrožnici K_2 pa velja $f(z) = e^{-int}$ in:

$$\begin{aligned}\int_{K_2} f(z)\,dz &= \int_0^\pi e^{-int}\cdot(-i)e^{-it}\,dt = -i\int_0^\pi e^{-i(n+1)t}\,dt,\\ &= -i\int_0^\pi (\cos(n+1)t - i\sin(n+1)t)\,dt,\\ &= -i\left(\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t + \frac{i}{n+1}\cos(n+1)t\right)\Bigg|_0^\pi,\\ &= \frac{1}{n+1}\left((-1)^{n+1}-1\right).\end{aligned}$$

V tem primeru sta integrala po obeh krivuljah enaka.

(c) Izračunajmo sedaj še oba integrala funkcije $f(z) = \frac{1}{z^k}$. Na krivulji K_1 je $f(z) = \frac{1}{e^{ikt}}$, od koder sledi:

$$\begin{aligned}\int_{K_1} f(z)\,dz &= \int_0^\pi e^{-ikt}\cdot ie^{it}\,dt = i\int_0^\pi e^{i(1-k)t}\,dt = i\int_0^\pi (\cos(1-k)t + i\sin(1-k)t)\,dt,\\ &= i\left(\frac{1}{1-k}\sin(1-k)t - \frac{i}{1-k}\cos(1-k)t\right)\Bigg|_0^\pi,\\ &= \frac{1}{1-k}\left((-1)^{1-k}-1\right).\end{aligned}$$

Na krivulji K_2 pa velja $f(z) = e^{ikt}$, zato je:

$$\begin{aligned}\int_{K_2} f(z)\,dz &= \int_0^\pi e^{ikt}\cdot(-i)e^{-it}\,dt = -i\int_0^\pi e^{i(k-1)t}\,dt = -i\int_0^\pi (\cos(k-1)t + i\sin(k-1)t)\,dt,\\ &= -i\left(\frac{1}{k-1}\sin(k-1)t - \frac{i}{k-1}\cos(k-1)t\right)\Bigg|_0^\pi,\\ &= -\frac{1}{k-1}\left((-1)^{k-1}-1\right),\\ &= \frac{1}{1-k}\left((-1)^{1-k}-1\right).\end{aligned}$$

Vidimo, da sta tudi v tem primeru oba integrala enaka.

Opomba: Pri tej nalogi smo spoznali konkretne primere bolj splošnega principa. Denimo, da integriramo holomorfno funkcijo po dveh krivuljah s skupnim začetkom in koncem. Če je funkcija holomorfna na celem območju, ki ga omejujeta krivulji, se integrala ujemata.

Če ima morda funkcija na tem območju kakšno singularnost a, pa je važen le člen v Laurentovi vrsti pri potenci $\frac{1}{z-a}$. Če tega člena ni, se integrala ujemata, sicer pa se razlikujeta. $\square$

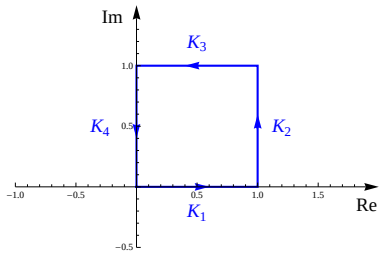
(13) Izračunaj kompleksne integrale:

(a) integral funkcije $f(z) = z^2$ po robu kvadrata z oglišči 0, 1, $1+i$ in i,

(b) integral funkcije $f(z) = (z-a)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, po krožnici $|z-a| = R$,

(c) integral funkcije $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^6}$ po krožnici $|z| = 1$.

Rešitev: (a) Rob kvadrata K sestoji iz štirih stranic K_1, K_2, K_3 in K_4.



V splošnem lahko daljico od točke a do b parametriziramo s predpisom

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb$$

za $t \in [0,1]$. Stranico K_1 lahko torej parametriziramo s predpisom $\gamma_1(t) = t$ za $t \in [0,1]$. Sledi $\gamma_1'(t) = 1$ in

$$\int_{K_1} f(z)\,dz = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}.$$

Za stranico K_2 vzemimo parametrizacijo $\gamma_2(t) = 1 + it$ z odvodom $\gamma_2'(t) = i$. Sledi:

$$\begin{aligned}\int_{K_2} f(z)\,dz &= \int_0^1 (1+it)^2 \cdot i\,dt = i\int_0^1 (1+2it-t^2)\,dt,\\ &= i\left(t + it^2 - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1,\\ &= \tfrac{2}{3}i - 1.\end{aligned}$$

Na stranici K_3 je $\gamma_3(t) = 1 - t + i$ in $\gamma_3'(t) = -1$. Torej je:

$$\begin{aligned}\int_{K_3} f(z)\,dz &= \int_0^1 (1-t+i)^2 \cdot (-1)\,dt = -\int_0^1 (1+t^2-1-2t+2i-2ti)\,dt,\\ &= \int_0^1 (-t^2+2t-2i+2ti)\,dt = \left(-\frac{t^3}{3} + t^2 - 2it + it^2\right)\Bigg|_0^1,\\ &= \tfrac{2}{3} - i.\end{aligned}$$

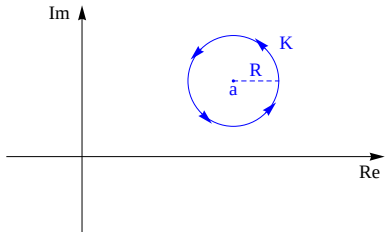
Za konec izračunajmo še integral po stranici K_4. Parametrizirajmo jo s predpisom $\gamma_4(t) = (1-t)i$. Sledi $\gamma_4'(t) = -i$ in:

$$\begin{aligned}\int_{K_4} f(z)\,dz &= \int_0^1 ((1-t)i)^2 \cdot (-i)\,dt = i\int_0^1 (1-2t+t^2)\,dt,\\ &= i\left(t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1,\\ &= \tfrac{1}{3}i.\end{aligned}$$

Integral po robu kvadrata je vsota teh štirih integralov:

$$\begin{aligned}\int_K f(z)\,dz &= \int_{K_1} f(z)\,dz + \int_{K_2} f(z)\,dz + \int_{K_3} f(z)\,dz + \int_{K_4} f(z)\,dz,\\ &= \tfrac{1}{3} + (\tfrac{2}{3}i - 1) + (\tfrac{2}{3} - i) + \tfrac{1}{3}i = 0.\end{aligned}$$

(b) Krožnico $|z-a| = R$ s središčem v a in s polmerom R lahko parametriziramo s predpisom $\gamma(t) = a + Re^{it}$ za $t \in [0, 2\pi]$.



Ta parametrizacija določa pot, ki krožnico obkroži v pozitivni smeri. Odvod parametrizacije je $\gamma'(t) = iRe^{it}$, integral pa je

$$\int_K f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^k \cdot (iR)e^{it}\,dt = iR^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt.$$

Na tem mestu ločimo sedaj dve možnosti. Če je $k = -1$, je ta integral enak

$$\int_K f(z)\,dz = iR^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Če pa je $k \neq -1$, pa je:

$$\begin{aligned}\int_K f(z)\,dz &= iR^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt = iR^{k+1}\int_0^{2\pi} (\cos(k+1)t + i\sin(k+1)t)\,dt,\\ &= iR^{k+1}\left(\frac{1}{k+1}\sin(k+1)t - \frac{i}{k+1}\cos(k+1)t\right)\Bigg|_0^{2\pi},\\ &= 0.\end{aligned}$$

<u>Opomba:</u> V splošnem velja za integrale po sklenjenih krivuljah naslednja opazka. Če je funkcija f holomorfna na celem območju, ki ga krivulja K omejuje, je

$$\int_K f(z)\,dz = 0.$$

Če pa ima funkcija na tem območju kakšno singularnost a, je važen le člen v Laurentovi vrsti pri potenci $\frac{1}{z-a}$, vse ostale negativne potence pa dajo pri integriranju rezultat 0.

(c) Za integracijo funkcije $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$ po krožnici $|z| = 1$ bomo uporabili rezultate prejšnje naloge. Najprej jo bomo razvili v Laurentovo vrsto okoli točke $z = 0$ z uporabo sinusne vrste

$$f(z) = \tfrac{\sin z}{z^6} = \tfrac{1}{z^6}\left(z - \tfrac{z^3}{3!} + \tfrac{z^5}{5!} - \tfrac{z^7}{7!} + \dots\right) = \tfrac{1}{z^5} - \tfrac{1}{3!z^3} + \tfrac{1}{5!z} - \tfrac{z}{7!} + \tfrac{z^3}{9!} + \dots$$

Pri integraciji po krožnici $|z| = 1$ bodo integrali vseh členov enaki nič, razen integrala člena $\frac{1}{5!z}$. Sledi

$$\int_K f(z)\,dz = \int_K \left(\tfrac{1}{z^5} - \tfrac{1}{3!z^3} + \tfrac{1}{5!z} - \tfrac{z}{7!} + \tfrac{z^3}{9!} + \dots\right) dz = \int_K \tfrac{1}{5!z}\,dz = \tfrac{1}{5!}\int_K \tfrac{1}{z}\,dz = \tfrac{\pi i}{60}.$$

□

(14) Dana je funkcija $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$.

(a) Izračunaj integrala funkcije f po krožnicah $|z| = \frac{1}{2}$ in $|z| = 2$.
(b) Izračunaj residuuma funkcije f v točkah $z = 0$ in $z = 1$.

Rešitev: (a) Funkcija $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$ ima pola v točkah $z = 0$ in $z = 1$. Za izračun integrala po krožnici $|z| = \frac{1}{2}$ jo bomo najprej razvili v Laurentovo vrsto na območju $0 < |z| < 1$. Z uporabo formule za geometrijsko vrsto dobimo

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z} = \tfrac{1}{z^3}(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \tfrac{1}{z^3} + \tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

Z uporabo rezultata prejšnje naloge od tod sledi

$$\int_K f(z)\,dz = \int_K \left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots\right) dz = \int_K \tfrac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Za izračun integrala funkcije f po krožnici $|z| = 2$ pa bomo funkcijo razvili v Laurentovo vrsto na območju $|z| > 1$. Tam velja

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\tfrac{1}{z^4}(1 + \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{z^3} + \dots) = -\tfrac{1}{z^4} - \tfrac{1}{z^5} - \tfrac{1}{z^6} - \tfrac{1}{z^7} + \dots$$

V tej vrsti ni člena $\frac{1}{z}$, zato velja

$$\int_K f(z)\,dz = \int_K \left(-\tfrac{1}{z^4} - \tfrac{1}{z^5} - \tfrac{1}{z^6} - \tfrac{1}{z^7} + \dots\right) dz = 0.$$

(b) Kot smo spoznali v konkretnih primerih, ima pri računanju integralov po sklenjenih poteh pomembno vlogo člen $\frac{1}{z-a}$ v Laurentovi vrsti. Recimo, da ima f singularnost v točki a in da je holomorfna na nekem območju $0 < |z - a| < R$. Potem jo lahko na tem območju razvijemo v Laurentovo vrsto

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

Koeficient a_{-1} imenujemo residuum funkcije f v točki a in ga označimo z $\mathrm{Res}(f, a)$. Kot smo že izračunali, je Laurentov razvoj funkcije f na območju $0 < |z| < 1$ enak

$$f(z) = \tfrac{1}{z^3} + \tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots$$

od koder sledi

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 1.$$

Za izračun residuuma v točki $z = 1$ moramo najti koeficient pri členu $\frac{1}{z-1}$ Laurentovega razvoja funkcije f. Najprej opazimo, da velja

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)} = -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(1+(z-1))^3} = -\frac{1}{z-1}\left(1 - (z-1) + (z-1)^2 + \dots\right)^3.$$

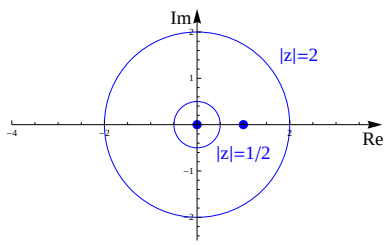
V oklepaju na desni nastopajo samo pozitivne potence člena $(z-1)$ in še prosti člen 1, kar pomeni, da je

$$\mathrm{Res}(f, 1) = -1.$$

Vrednosti teh dveh residuumov sta v tesni povezavi z integraloma funkcije f po krožnicah $|z| = \frac{1}{2}$ in $|z| = 2$. Velja namreč:

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, 0),$$
$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i\, (\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, 1)).$$

V splošnem pa je integral holomorfne funkcije po sklenjeni krivulji premo sorazmeren z vrednostmi residuumov funkcije v notranjosti območja, ki ga krivulja omejuje.



□

(15) Poišči singularne točke in residuume danih funkcij:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$,

(b) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$.

Rešitev: Razvoj funkcije v Laurentovo vrsto ni vedno najbolj praktičen način za izračun residuuma funkcije v dani točki. Če ima funkcija f v točki a pol reda n, lahko residuum izračunamo s formulo

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-a)^n f(z).$$

(a) Funkcija

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

ima dve singularnosti v točkah $z = \pm i$. V obeh točkah ima f pola reda 1, zato sta residuuma enaka:

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i},$$

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{z+i}{(z+i)(z-i)} = -\frac{1}{2i}.$$

(b) Funkcija

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{(z+1)^2(z-1)^2}$$

ima prav tako dve singularnosti, in sicer v točkah $z = \pm 1$. V obeh točkah sta tokrat pola reda 2, zato sta residuuma enaka:

$$\operatorname{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+1)^2} = \lim_{z\to 1} = -\frac{2}{(z+1)^3} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}(z+1)^2 f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-1)^2} = \lim_{z\to -1} = -\frac{2}{(z-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

□

(16) Z uporabo izreka o residuih izračunaj kompleksna integrala:

(a) funkcije $f(z) = \dfrac{1}{z^3-4z}$ po krožnici $|z-3| = 4$,

(b) funkcije $f(z) = \dfrac{1}{z^4-1}$ po krožnici $|z-2| = 2$.

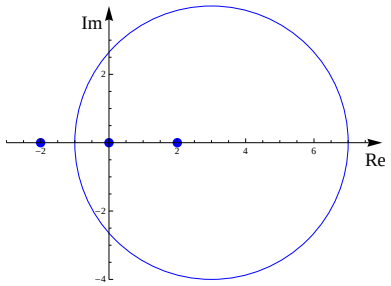
Rešitev: Dana kompleksna integrala bomo izračunali s pomočjo izreka o residuih. Naj bo K sklenjena krivulja in naj ima funkcija f v notranjosti območja, ki ga K omejuje, singularnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Potem velja

$$\int_K f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k).$$

(a) Funkcija

$$f(z) = \frac{1}{z^3-4z} = \frac{1}{z(z-2)(z+2)}$$

ima tri singularnosti v točkah $z = 0$ in $z = \pm 2$. V krogu, ki ga omejuje krožnica $|z-3| = 4$ pa ležita singularnosti $z = 0$ in $= 2$.



V obeh točkah ima f pol reda 1, residuuma funkcije f v teh dveh točkah pa sta:

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2-4} = -\frac{1}{4},$$
$$\operatorname{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{8}.$$

Integral funkcije f po krožnici $|z-3| = 4$ je torej enak

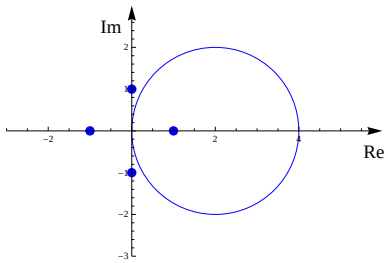
$$\int_K f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}\right) = -\tfrac{\pi i}{4}.$$

(b) Funkcija

$$f(z) = \frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$$

ima štiri pole reda ena. Znotraj krožnice $|z-2| = 2$ pa leži samo pol $z = 1$ z residuumom

$$\operatorname{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{1}{4}.$$



Od tod dobimo

$$\int_K f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{\pi i}{2}.$$

□

(17) S pomočjo kompleksne integracije izračunaj naslednja izlimitirana integrala:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx.$

Rešitev: Z uporabo metod kompleksne integracije lahko izračunamo nekatere določene ali pa izlimitirane integrale brez računanja nedoločenega integrala. Še posebej je to uporabno, kadar nedoločeni integral ni elementarna funkcija.

Naš osnovni cilj je najti primerno krivuljo in pa holomorfno funkcijo f, katere kompleksni integral po dani krivulji bo v zvezi z iskanim integralom. Pri računanju izlimitiranih integralov po celi realni osi lahko pogosto uporabimo polkrožnico K_R, ki sestoji iz intervala $I_R = [-R, R]$ in pa loka L_R s polmerom R.

Pogosto lahko iskani izlimitirani integral izrazimo z limito integralov $\int_{I_R} f(z)\,dz$, ko gre $R \to \infty$. Če torej slučajno integrali $\int_{I_R} f(z)\,dz$ konvergirajo proti nič, lahko izlimitirani

integral izrazimo z limito integralov $\int_{K_R} f(z)\,dz$. Vsakega od teh pa lahko izračunamo z uporabo izreka o residuih.

(a) Definirajmo holomorfno funkcijo

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Na intervalu I_R lahko uporabimo parametrizacijo $\gamma(t) = t$ za $t \in [-R, R]$, da dobimo

$$\int_{I_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Vidimo, da v limiti velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{I_R} f(z)\,dz.$$

Na loku L_R pa bomo uporabili parametrizacijo $\gamma(t) = Re^{it}$ za $t \in [0, \pi]$. Njen odvod je $\gamma'(t) = Rie^{it}$, kompleksni integral funkcije f po L_R pa je enak

$$\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{((Re^{it})^2+1)^2} \cdot Rie^{it}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{(R^2e^{2it}+1)^2}\,dt.$$

Naš cilj je, da pokažemo, da gredo vrednosti teh integralov proti nič, ko gre $R \to \infty$. Z uporabo trikotniške neenakosti lahko navzgor ocenimo absolutno vrednost integrala

$$\Big|\int_{L_R} f(z)\,dz\Big| \le \int_0^{\pi} \Big|\frac{Rie^{it}}{(R^2e^{2it}+1)^2}\Big|\,dt \le \int_0^{\pi} \frac{R}{(R^2-1)^2}\,dt = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}.$$

Od tod sledi

$$\lim_{R\to\infty} \Big|\int_{L_R} f(z)\,dz\Big| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = 0,$$

kar smo želeli pokazati. Sedaj torej vemo, da velja

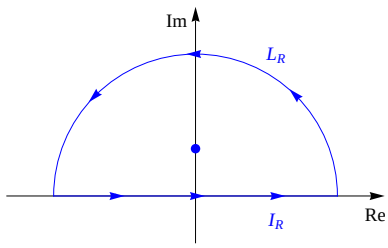
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(z)\,dz.$$

Za izračun integrala na desni bomo uporabili izrek o residuih.

Funkcija

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

ima pola $z = \pm i$, ki sta oba reda dva, znotraj krivulje K_R pa leži samo pol $z = i$.



Residuum funkcije f v tem polu je

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}(z-i)^2 f(z) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i} = \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

Od tod sledi

$$\int_{K_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \tfrac{1}{4i} = \tfrac{\pi}{2}.$$

Torej tudi v limiti dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \tfrac{\pi}{2}.$$

(b) Sedaj poskusimo s funkcijo

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}.$$

Na intervalu I_R velja

$$\int_{I_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{t^2+1}\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{t^2+1}\,dt + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{\cos t}{t^2+1}\,dt.$$

Imaginarni del je enak nič zaradi lihosti integranda in simetričnega intervala. V limiti torej velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{I_R} f(z)\,dz.$$

Na loku L_R imamo $\gamma(t) = Re^{it}$ in $\gamma'(t) = Rie^{it}$, zato je

$$\int_{L_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2+1} \cdot Rie^{it}\,dt = \int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}e^{iR(\cos t + i\sin t)}}{R^2e^{2it}+1}\,dt.$$

Najprej opazimo, da velja:

$$\begin{aligned} e^{iR(\cos t + i\sin t)} &= e^{iR\cos t - R\sin t}, \\ |e^{iR(\cos t + i\sin t)}| &= e^{-R\sin t} \le 1. \end{aligned}$$

To sledi iz dejstva, da je za $t \in [0,\pi]$ eksponent $-R\sin t \le 0$.

Z uporabo trikotniške neenakosti dobimo podobno kot prej oceno

$$\Big|\int_{L_R} f(z)\,dz\Big| \le \int_0^{\pi} \Big|\frac{Rie^{it}e^{iR(\cos t + i\sin t)}}{R^2e^{2it}+1}\Big|\,dt \le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1}\,dt = \frac{\pi R}{R^2-1},$$

od koder sledi

$$\lim_{R\to\infty} \Big|\int_{L_R} f(z)\,dz\Big| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{R^2-1} = 0.$$

Torej velja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{K_R} f(z)\,dz.$$

Izračunati moramo še integral na desni. Funkcija

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

ima dva pola $z = \pm i$ reda ena. Znotraj krivulje K_R pa spet leži samo pol $z = i$. Residuum funkcije f v tem polu je

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z + i} = \lim_{z \to i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ei}.$$

Torej je

$$\int_{K_R} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \tfrac{1}{2ei} = \tfrac{\pi}{e}$$

in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\, dx = \tfrac{\pi}{e}.$$

<u>Opomba:</u> Na prvi pogled bi se zdela bolj naravna izbira holomorfne funkcije

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 1}.$$

Na probleme pa bi naleteli, ko bi hoteli pokazati, da konvergirajo integrali te funkcije po lokih L_R proti nič, saj funkcija $\cos z$ na teh lokih ni omejena, ko gre $R \to \infty$. $\square$