Izbrana poglavja iz matematike
3. sklop nalog

Nihanje

(1) Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$m\ddot{y} + ky = kz_0 \cos \omega t$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = 0$.

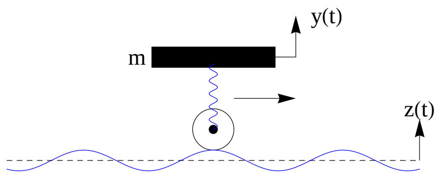
Rešitev: Pri tej nalogi bomo študirali harmonično vsiljeno nihanje, ki je določeno z enačbo

$$m\ddot{y} + ky = kz_0 \cos \omega t.$$

To enačbo lahko interpretiramo kot enostaven model avtomobilskega vzmetenja. Privzeli bomo, da ima avtomobil maso m in da je koeficient vzmeti enak k, zanimalo pa nas bo, kako neravna podlaga vpliva na vertikalno gibanje avtomobila. S funkcijo

$$z(t) = z_0 \cos \omega t$$

bomo opisali valovito podlago, s funkcijo $y(t)$ pa vertikalen odmik avtomobila od začetne lege. Zaenkrat bomo predpostavili, da ni dušenja.



Dano diferencialno enačbo bomo najprej prepisali v obliko

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 z_0 \cos \omega t,$$

kjer smo z $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ označili lastno frekvenco nihala. Rešitvi prirejene karakteristične enačbe $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ sta $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, zato je splošna rešitev homogenega dela enaka

$$y_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Za izračun partikularne rešitve bomo predpostavili, da $\omega \neq \omega_0$ in vzeli nastavek

$$y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Tedaj je:

$$\dot{y}_p(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t,$$
$$\ddot{y}_p(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t.$$

Če ta nastavek vstavimo v enačbo, dobimo

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = \omega_0^2 z_0 \cos \omega t.$$

Primerjava koeficientov pri sinusih in kosinusih nam pove, da velja:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_0^2 z_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ B &= 0. \end{aligned}$$

Koeficient A ponavadi zapišemo v obliki

$$A = \frac{z_0}{1 - r^2},$$

kjer je $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ razmerje med vzbujano frekvenco in lastno frekvenco nihala. Tako pridemo do partikularne rešitve

$$y_p(t) = \frac{z_0}{1 - r^2} \cos \omega t$$

in splošne rešitve enačbe

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{z_0}{1 - r^2} \cos \omega t.$$

Njen odvod je enak

$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t - \frac{z_0 \omega}{1 - r^2} \sin \omega t.$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = 0$ dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1 + \frac{z_0}{1 - r^2} &= 0, \\ C_2 \omega_0 &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $C_1 = -\frac{z_0}{1 - r^2}$ in $C_2 = 0$. Gibanje sistema je torej določeno s predpisom

$$y(t) = \frac{z_0}{1 - r^2} \left(\cos \omega t - \cos \omega_0 t \right).$$

Z uporabo faktorizacijske formule

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

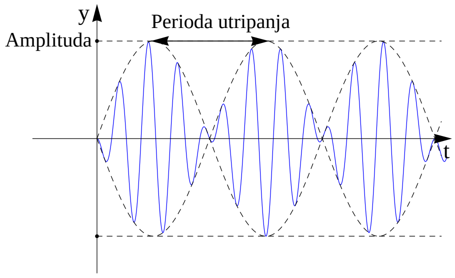
lahko ta izraz predstavimo v obliki

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{2 z_0}{r^2 - 1} \sin \left(\frac{\omega + \omega_0}{2} \cdot t \right) \sin \left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \cdot t \right)}}.$$

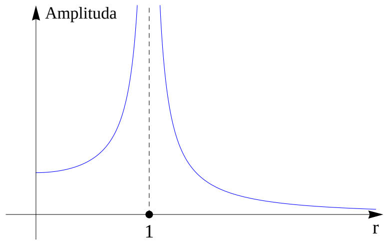
Dobili smo funkcijo, ki je produkt dveh sinusov z visoko in nizko frekvenco. Takšno gibanje lahko interpretiramo kot utripajoče nihanje z naslednjimi parametri:

$$\begin{aligned} \text{frekvenca utripanja} &= \left| \frac{\omega - \omega_0}{2} \right|, \\ \text{frekvenca nihanja} &= \frac{\omega + \omega_0}{2}, \\ \text{amplituda} &= \left| \frac{2 z_0}{r^2 - 1} \right|. \end{aligned}$$

Perioda utripanja je v tem primeru enaka $T = \frac{4\pi}{|\omega - \omega_0|}$. Graf funkcije y dobimo tako, da v sinusoido, ki predstavlja utripanje, včrtamo sinusoido, ki predstavlja nihanje.



Ko gre razmerje $r = \frac{\omega}{\omega_0}$ proti ena, raste amplituda utripanja čez vse meje.



$\square$

(2) Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$m\ddot{y} + ky = kz_0 \cos \omega_0 t$$

pri začetnih pogojih $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = 0$.

Rešitev: Sedaj bomo obravnavali primer, ko se frekvenca vzbujanja ujema z lastno frekvenco nihala. Splošna rešitev homogene enačbe je podobno kot prej enaka

$$y_h(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Ker je sedaj ω_0 rešitev karakteristične enačbe stopnje ena, bomo vzeli nastavek

$$y_p(t) = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t),$$

katerega odvoda sta:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_p(t) &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + t(-A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t), \\
\ddot{y}_p(t) &= -2A\omega_0 \sin \omega_0 t + 2B\omega_0 \cos \omega_0 t + t(-A\omega_0^2 \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 \sin \omega_0 t).
\end{aligned}$$

Ko to vstavimo v enačbo, dobimo

$$-2A\omega_0 \sin \omega_0 t + 2B\omega_0 \cos \omega_0 t = z_0\omega_0^2 \cos \omega_0 t,$$

od koder sledi:

$$\begin{aligned}
A &= 0, \\
B &= \frac{z_0\omega_0}{2}.
\end{aligned}$$

Partikularna rešitev je torej

$$y_p(t) = \frac{z_0\omega_0}{2} t \sin \omega_0 t.$$

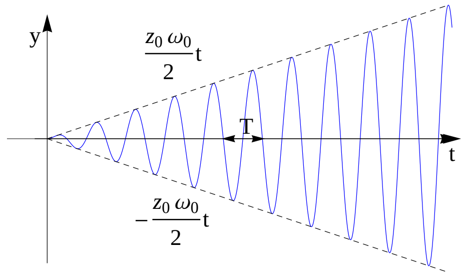
Splošna rešitev enačbe in njen odvod pa sta:

$$y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{z_0 \omega_0}{2} t \sin \omega_0 t,$$
$$\dot{y}(t) = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t + \frac{z_0 \omega_0}{2} \sin \omega_0 t + \frac{z_0 \omega_0^2}{2} t \cos \omega_0 t.$$

Če upoštevamo začetna pogoja $y(0) = 0$ in $\dot{y}(0) = 0$, dobimo $C_1 = C_2 = 0$ in

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{z_0 \omega_0}{2} t \sin \omega_0 t.}}$$

Sistem niha s periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, medtem ko raste amplituda nihanja linearno čez vse meje. Ta pojav imenujemo resonanca.



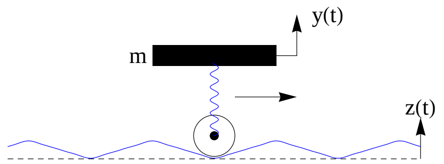
□

(3) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$m\ddot{y} + ky = kz,$$

kjer je funkcija $z(t)$ definirana kot periodična razširitev funkcije $z(t) = \frac{z_0}{T}|t|$ z intervala $[-T, T]$ na vsa realna števila.

Rešitev: Tokrat imamo opravka s periodično funkcijo z, ki ni harmonična.



Najprej jo bomo razvili v Fourierovo vrsto

$$z(t) = \frac{z_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z_0}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1\right) \cos\left(n\omega t\right),$$

kjer je $\omega = \frac{\pi}{T}$. Postopek reševanja enačbe

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 z$$

bo sedaj podoben kot v primeru harmoničnega vsiljevanja nihanja, le da bo partikularna rešitev sestavljena iz vsote členov, ki ustrezajo členom v Fourierovi vrsti funkcije z. Da si olajšamo pisavo, označimo

$$z_n = \frac{2z_0}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right),$$

kar pomeni, da je

$$z(t) = \frac{z_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z_n \cos(n\omega t).$$

Rešitev homogene enačbe je kot v prejšnjih primerih

$$y_h(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t,$$

členu $z_n \cos(n\omega t)$ v Fourierovem razvoju pa ustreza v partikularni rešitvi člen

$$\frac{z_n}{1 - \frac{n^2\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(n\omega t).$$

Posebej lahko še preverimo, da prostemu členu $\frac{z_0}{2}$ ustreza partikularna rešitev $y_p(t) = \frac{z_0}{2}$. Ko seštejemo rešitev homogene enačbe in vse te partikularne rešitve, dobimo splošno rešitev enačbe

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t + \frac{z_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{1 - \frac{n^2\omega^2}{\omega_0^2}} \cos(n\omega t), \\ &= \underline{\underline{C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t + \frac{z_0}{2} + \frac{2z_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2(1 - \frac{n^2\omega^2}{\omega_0^2})} \cos(n\omega t).}} \end{aligned}$$

Iz oblike rešitve je razvidno, da koeficienti v vrsti zelo hitro padajo proti nič, najbolj pomembni pa so tisti členi, pri katerih je frekvenca $n\omega$ blizu lastne frekvence ω_0. To pomeni, da imajo pri poljubnem periodičnem vzbujanju nekega nihala glavno vlogo tiste frekvence iz spektra, ki so blizu lastni frekvenci nihala. Če lastna frekvenca nihala leži v spektru sile vzbujanja, pa podobno kot prej pride do resonance. □

(4) Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \cos\omega t.$$

Rešitev: Sedaj bomo predpostavili, da imamo poleg sile, ki vsiljuje nihanje s frekvenco ω, še silo, ki duši nihanje s koeficientom c. Če označimo $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ in $a_0 = \frac{F_0}{m}$, lahko dano enačbo prepišemo v obliko

$$\ddot{y} + \tfrac{c}{m}\dot{y} + \omega_0^2 y = a_0 \cos\omega t.$$

Karakteristična enačba

$$\lambda^2 + \tfrac{c}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$$

ima rešitvi

$$\lambda_{1,2} = -\tfrac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\tfrac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}.$$

Na tem mestu pogosto uvedemo količino

$$\zeta = \tfrac{c}{2m\omega_0},$$

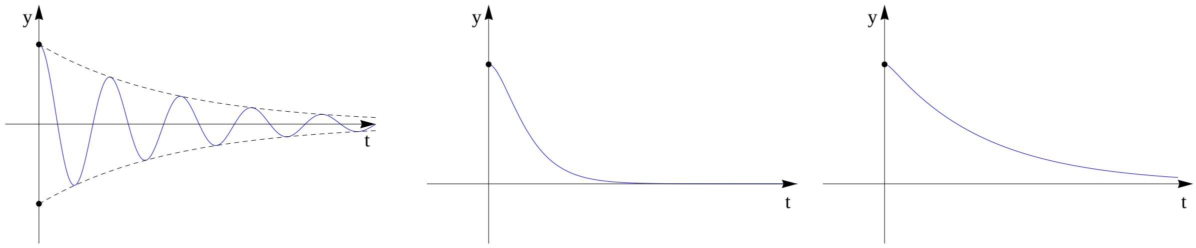
ki jo interpretiramo kot količnik dušenja. Karakteristični števili lahko potem zapišemo v obliki

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

V odvisnosti od parametra $\zeta > 0$ se lahko zgodijo naslednje možnosti:

- $\zeta < 1$ podkritično dušenje,
- $\zeta = 1$ kritično dušenje,
- $\zeta > 1$ nadkritično dušenje.

Vidimo, da nadkritično dušenje ustreza primeru, ko sta karakteristični števili enačbe obe realni in različni. Pri kritičnem dušenju imamo eno dvojno realno ničlo, pri podkritičnem dušenju pa sta karakteristični števili konjugirani kompleksni števili. Realni del je v vseh primerih, ko imamo dušenje, negativen, kar pomeni, da pada amplituda eksponentno proti nič. Če je $\zeta < 1$, imamo poleg tega še nihanje s frekvenco $\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$.



Splošno rešitev homogene enačbe lahko sedaj zapišemo v obliki

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Iz dejstva, da sta realna dela karakterističnih števil negativna, sledi, da velja

$$\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0,$$

kar pomeni, da ima glavno vlogo v splošni rešitvi partikularna rešitev. Za nastavek bomo spet vzeli funkcijo oblike

$$y_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

z odvodoma:

$$\begin{aligned}\dot{y}_p(t) &= -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t,\\ \ddot{y}_p(t) &= -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t.\end{aligned}$$

Če ta nastavek vstavimo v enačbo, dobimo

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + 2\omega_0\zeta(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + \omega_0^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = a_0\cos\omega t.$$

Primerjava koeficientov pri sinusih in kosinusih nam pove, da velja:

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\omega_0\omega\zeta B &= a_0,\\ (\omega_0^2 - \omega^2)B - 2\omega_0\omega\zeta A &= 0.\end{aligned}$$

Od tod najprej dobimo

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)B}{2\omega_0\omega\zeta},$$

ko to vstavimo v prvo enačbo, pa še:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{2a_0\omega_0\omega\zeta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega_0\omega\zeta)^2},\\
A &= \frac{(\omega_0^2-\omega^2)a_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega_0\omega\zeta)^2}.
\end{aligned}
$$

Partikularna rešitev je torej vsota sinusa in kosinusa z isto frekvenco, zato jo lahko zapišemo v obliki

$$y_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t-\delta),$$

kjer je C amplituda nihanja, δ pa fazni zamik nihanja. Z uporabo adicijske formule za kosinus dobimo

$$C\cos(\omega t-\delta) = C(\cos\omega t\cos\delta + \sin\omega t\sin\delta),$$

kar pomeni, da velja:

$$
\begin{aligned}
A &= C\cos\delta,\\
B &= C\sin\delta.
\end{aligned}
$$

Ker je C pozitivno število, iz zgornjih enakosti dobimo

$$C = \sqrt{A^2+B^2} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega_0\omega\zeta)^2}}.$$

Ta rezultat pogosto raje izrazimo z brezdimenzijskim količnikom $r=\frac{\omega}{\omega_0}$ tako, da števec in imenovalec delimo z $\omega_0^2=\frac{k}{m}$. Tako dobimo formulo, ki nam pove, s kakšno amplitudo niha nihalo, ki ga hkrati vzbujamo in dušimo

$$\text{amplituda} = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\zeta)^2}}.$$

Vidimo, da bo amplituda visoka, ko bo vzbujana frekvenca blizu lastni frekvenci nihala in ko bo dušenje majhno.

Izračunajmo sedaj še fazni zamik. V kolikor je $r<1$, sta A in B oba pozitivna, zato z deljenjem dobimo $\operatorname{tg}\delta=\frac{B}{A}$ oziroma

$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\omega_0\omega\zeta}{\omega_0^2-\omega^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2r\zeta}{1-r^2}.$$

Če je $r=1$, je fazni zamik $\delta=\frac{\pi}{2}$, če je $r>1$, pa je A negativen, kar pomeni, da je $\delta=\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\zeta}{1-r^2}+\pi$. Vse tri primere lahko strnemo v predpis

$$\text{fazni zamik} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\frac{2r\zeta}{1-r^2} & ;\ r<1,\\ \frac{\pi}{2} & ;\ r=1,\\ \operatorname{arc\,tg}\frac{2r\zeta}{1-r^2}+\pi & ;\ r>1. \end{cases}$$

Za konec bomo analizirali še grafe amplitud nihanja in faznih zamikov v odvisnosti od r in ζ. Označimo z

$$A(r,\zeta) = \frac{F_0}{k\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\zeta)^2}}$$

amplitudo nihanja. Parcialni odvod

$$\frac{\partial A}{\partial r} = -\frac{F_0}{k}\frac{(1-r^2)(-2r)+4\zeta^2 r}{(\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\zeta)^2})^{\frac{3}{2}}}$$

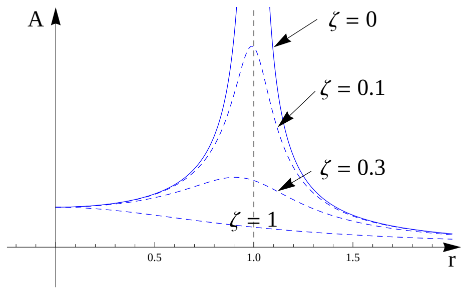
je pri fiksnem ζ enak nič natanko takrat, ko velja

$$r^2 = 1 - 2\zeta^2.$$

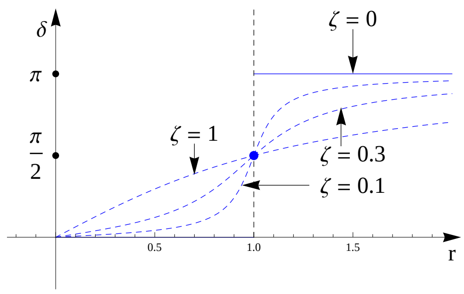
Če skiciramo graf amplitude pri fiksnem količniku ζ, bo le ta imel lokalni maksimum v primeru, ko bo $\zeta^2 < \frac{1}{2}$. V tem primeru bo maksimum dosežen pri $r = \sqrt{1-2\zeta^2}$, maksimalna amplituda pa bo enaka

$$A_{\max} = \frac{F_0}{k\sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4}}.$$

Kakor hitro je količnik dušenja neničeln, torej ne more priti do resonance, je pa lahko pri majhnih vrednostih ζ maksimalna amplituda zelo velika.



Poglejmo si še nekaj grafov faznega zamika pri posameznih vrednostih ζ.



Pri dušenem nihanju je fazni zamik enak $\delta = 0$ ali $\delta = \pi$, odvisno od tega, ali je $r < 1$ oziroma $r > 1$. Podoben sklep velja tudi, če je bodisi ζ zelo majhen, ali pa je r daleč proč od ena. Ko se r približuje ena, se fazni zamik približuje $\frac{\pi}{2}$. □

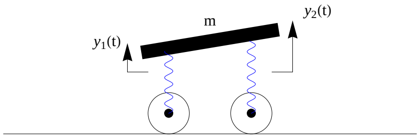
(5) Izračunaj lastne frekvence in osnovne načine nihanja nihala, ki ga določa sistem enačb:

$$\frac{1}{3}m\ddot{y}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{y}_2 = -ky_1,$$
$$\frac{1}{6}m\ddot{y}_1 + \frac{1}{3}m\ddot{y}_2 = -ky_2.$$

Rešitev: Sedaj imamo opravka s sistemom diferencialnih enačb:

$$\frac{1}{3}m\ddot{y}_1 + \frac{1}{6}m\ddot{y}_2 = -ky_1,$$
$$\frac{1}{6}m\ddot{y}_1 + \frac{1}{3}m\ddot{y}_2 = -ky_2,$$

ki opisuje (majhno) nihanje para vzmeti s koeficientoma k, ki sta povezani s palico z maso m. Z y_1 označimo vertikalni odmik levega konca palice od ravnovesne lege, z y_2 pa vertikalni odmik desnega konca palice od ravnovesne lege.



Tokrat sistema enačb ne bomo eksplicitno rešili, ampak bomo samo poiskali lastne frekvence in osnovne načine nihanja. Dani sistem diferencialnih enačb najprej prepišimo v matrično obliko

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Če označimo

$$M = \begin{bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

imamo torej opravka z vektorsko diferencialno enačbo

$$M\ddot{\vec{y}} + K\vec{y} = 0,$$

ki je analog enačbe nihanja $m\ddot{y} + ky = 0$ za sisteme z večimi prostostnimi stopnjami. Matriki M rečemo masna matrika, medtem ko je K matrika koeficientov. Pri obravnavi nihanja sistemov okoli stabilnih ravnovesnih leg sta matriki M in K simetrični in pozitivno definitni. Pri analizi nihanja sistemov z večimi prostostnimi stopnjami nas zanimajo lastne frekvence nihanja in pa pripadajoči osnovni načini nihanja. Lastne frekvence so rešitve enačbe

$$\det(\omega^2 M - K) = 0,$$

osnovne načine nihanja pa lahko razberemo iz pridruženih lastnih vektorjev. V našem primeru tako dobimo enačbo

$$\begin{vmatrix} \frac{m\omega^2}{3} - k & \frac{m\omega^2}{6} \\ \frac{m\omega^2}{6} & \frac{m\omega^2}{3} - k \end{vmatrix} = \left(\frac{m\omega^2}{3} - k\right)^2 - \frac{m^2\omega^4}{36} = 0,$$

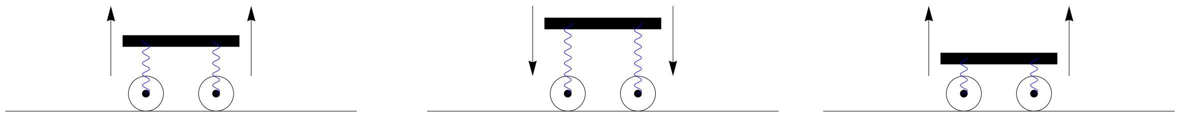
ki ima rešitvi:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \tfrac{2k}{m}, \\ \omega_2^2 &= \tfrac{6k}{m}. \end{aligned}$$

Prvi lastni frekvenci ustreza vektor, ki reši sistem enačb:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{2km}{3m} - k & \frac{2km}{6m} \\ \frac{2km}{6m} & \frac{2km}{3m} - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 0, \\ \begin{bmatrix} -\frac{k}{3} & \frac{k}{3} \\ \frac{k}{3} & -\frac{k}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Izberemo lahko na primer vektor $v_1 = (1, 1)$. Pripadajoči način nihanja lahko opišemo kot nihanje celega nihala gor-dol.

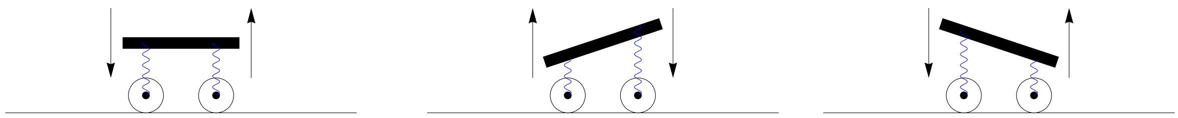


Drugi lastni frekvenci pa ustreza vektor, ki reši sistem:

$$\begin{bmatrix} \frac{6km}{3m} - k & \frac{6km}{6m} \\ \frac{6km}{6m} & \frac{6km}{3m} - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Tokrat lahko izberemo vektor $v_2 = (1, -1)$. Pri tem načinu oba konca nihala nihata v nasprotnih smereh.



Opazimo lahko, da je frekvenca nihanja v nasprotnih smereh višja kot pa frekvenca, pri kateri oba konca nihata v isto smer. $\square$