Izbrana poglavja iz matematike
4. sklop nalog

Parcialne diferencialne enačbe

(1) Reši toplotno enačbo
$$u_t = k^2 u_{xx}$$
pri robnih pogojih $u(0,t) = u(L,t) = 0$ in pri začetnem pogoju $u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

Rešitev: Toplotna enačba
$$u_t = k^2 u_{xx}$$
je linearna parcialna diferencialna enačba drugega reda. V naravoslovju se uporablja za simuliranje difuzije toplote v neki snovi, v računalništvu pa se podobne ideje uporabljajo za glajenje signalov.

V našem primeru bomo študirali toplotno enačbo na končnem intervalu v eni dimenziji. Mislimo si lahko, da študiramo spreminjanje temperature vzdolž palice dolžine L. Privzeli bomo, da vemo, kako je bila temperatura porazdeljena na začetku in kakšna je temperatura na obeh koncih palice. Matematično sta ta dva podatka opredeljena z začetnim in pa z robnima pogojema.

Začetni pogoj:
$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Robna pogoja:
$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(L,t) &= 0. \end{aligned}$$

Pri tej izbiri začetnega in robnih pogojev je temperatura palice na obeh koncih ves čas enaka nič, na začetku pa je porazdeljena sinusno vzdolž palice. Fizikalno to interpretiramo kot ohlajanje palice.

Rešitev toplotne enačbe bomo poiskali v dveh korakih s Fourierovo metodo:

(1) Najprej poiščemo razcepne rešitve toplotne enačbe oblike $u(x,t) = F(x)G(t)$, ki zadoščajo robnima pogojema.
(2) Splošna rešitev je oblike
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n u_n(x,t),$$
kjer koeficiente (B_n) izberemo tako, da zadostimo začetnemu pogoju.

Najprej bomo poiskali razcepne rešitve toplotne enačbe. To so tiste, ki jih lahko zapišemo v obliki produkta

$$u(x,t) = F(x)G(t),$$

kjer F in G nista ničelni funkciji. Upoštevanje robnih pogojev nam pove, da velja

$$u(0,t) = u(L,t) = F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0$$

za vsak t. Od tod sklepamo, da je

$$F(0) = F(L) = 0.$$

Z odvajanjem funkcije u lahko sedaj toplotno enačbo prevedemo v enačbo

$$F(x)\dot{G}(t) = k^2 F''(x)G(t),$$

ki jo bomo zapisali v obliki

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\dot{G}(t)}{k^2 G(t)}.$$

V tej obliki imamo na levi strani funkcijo, ki je odvisna samo od spremenljivke x, na desni strani pa funkcijo, ki je odvisna samo od spremenljivke t. Od tod sklepamo, da obstaja konstanta a, da je

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\dot{G}(t)}{k^2 G(t)} = a.$$

V odvisnosti od konstante a sedaj ločimo nekaj primerov:

1) $\underline{a = \mu^2 > 0}$:

V tem primeru imamo enačbo

$$F''(x) - \mu^2 F(x) = 0,$$

ki ima splošno rešitev oblike

$$F(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}.$$

Z upoštevanjem pogojev $F(0) = F(L) = 0$ pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 e^{\mu L} + C_2 e^{-\mu L} &= 0, \end{aligned}$$

ki ima edino rešitev $C_1 = C_2 = 0$. Od tod bi dobili rešitev $F(x) = 0$, ki pa nas ta trenutek ne zanima.

2) $\underline{a = 0}$:

V tem primeru imamo enačbo

$$F''(x) = 0,$$

ki ima splošno rešitev oblike

$$F(x) = C_1 x + C_2.$$

Z upoštevanjem robnih pogojev tudi tokrat dobimo edino rešitev $F(x) = 0$.

3) $\underline{a = -\mu^2 < 0}$:

Sedaj imamo enačbo

$$F''(x) + \mu^2 F(x) = 0$$

s splošno rešitvijo

$$F(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x).$$

Z upoštevanjem robnih pogojev dobimo sistem enačb:

$$C_1 = 0,$$
$$C_2 \sin(\mu L) = 0.$$

Zanimajo nas netrivialne rešitve, zato privzemimo, da je $C_2 \neq 0$. Iz pogoja $\sin(\mu L) = 0$ potem sledi, da velja

$$\mu L = n\pi$$

za neko naravno število n. Označimo $\mu_n = \frac{n\pi}{L} = n\omega$, kjer je $\omega = \frac{\pi}{L}$. Če je torej $\mu = \mu_n$ za nek n, obstajajo netrivialne rešitve enačbe, ki so oblike

$$F_n(x) = \sin(n\omega x).$$

Izberimo si sedaj nek n in naj bo $\mu = \mu_n$. Enačbo za $G = G_n$ lahko potem zapišemo v obliki

$$\dot{G}_n(t) = -\mu_n^2 k^2 G_n(t),$$

ki ima splošno rešitev

$$G_n(t) = B_n e^{-\mu_n^2 k^2 t},$$

za neko konstanto B_n. Tako dobimo družino rešitev toplotne enačbe

$$u_n(x,t) = B_n e^{-\mu_n^2 k^2 t} \sin(n\omega x).$$

To so rešitve, ki jih lahko zapišemo v obliki produkta. Splošno rešitev pa lahko zapišemo kot vsoto takšnih:

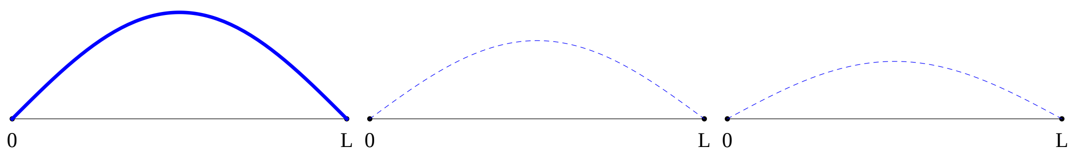
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2\pi^2 k^2 t}{L^2}} \sin(n\omega x).$$

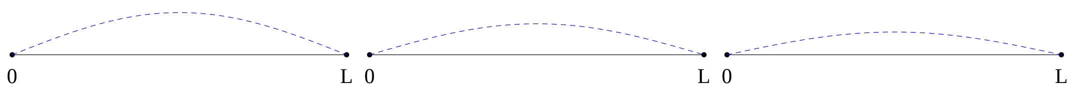
Iz začetnega pogoja $u(x,0) = f(x)$ sledi, da so koeficienti B_n ravno koeficienti, ki jih dobimo pri razvoju funkcije f v Fourierovo sinusno vrsto na intervalu $[0, L]$.

Pri konkretni izbiri $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ tako dobimo rešitev

$$u(x,t) = e^{-\frac{\pi^2 k^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Pri $t \to \infty$ rešitev $u(x,t)$ konvergira proti nič za vsak $x \in [0, L]$:





Toplotna enačba opisuje difuzijo energije ali toplote po prostoru. Pri teh začetnih pogojih teži porazdelitev toplote iz začetne neenakomerne porazdelitve k enakomerni porazdelitvi. □

(2) Poišči rešitev toplotne enačbe

$$u_t = u_{xx}$$

pri robnih pogojih $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$ in pri začetnem pogoju $u(x,0) = x^2$.

Rešitev: Sedaj si bomo pogledali podoben primer kot prej, le da bosta temperaturi na obeh koncih palice različni. V takšnem primeru lahko splošno rešitev enačbe izrazimo kot vsoto neke partikularne rešitve enačbe, ki zadošča obema robnima pogojema, in pa rešitve enačbe, ki zadošča modificiranemu začetnemu pogoju in pa homogenim robnim pogojem. To pomeni, da je rešitev enačbe oblike

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_p(x),$$

kjer je u_p linearna funkcija, ki zadošča robnima pogojema, $u_0(x,t)$ pa funkcija, ki reši toplotno enačbo pri ničelnih robnih pogojih in pri začetnem pogoju

$$u_0(x,0) = u(x,0) - u_p(x).$$

V našem primeru je $u_p(x) = x$, zato bo funkcija u_0 rešitev toplotne enačbe pri robnih pogojih $u_0(0,t) = u_0(1,t) = 0$ in pri začetnem pogoju $u_0(x,0) = x^2 - x$. Torej je

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x),$$

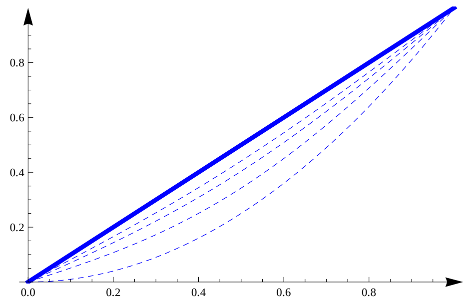
kjer so (B_n) koeficienti, ki jih dobimo pri razvoju funkcije $u_0(x,0) = x^2 - x$ v Fourierovo sinusno vrsto na intervalu $[0,1]$. Računajmo:

$$\begin{aligned}
B_n &= 2\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\left(-\frac{1}{n\pi}(x^2 - x)\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (2x-1)\cos(n\pi x)\,dx\right), \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{1}{n\pi}(2x-1)\sin(n\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx\right) = \frac{4}{n^3\pi^3}\cos(n\pi x)\Big|_0^1, \\
&= \frac{4}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

Od tod preberemo, da je funkcija u oblike

$$u(x,t) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi^3}((-1)^n - 1)e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x).$$

Pri $t \to \infty$ konvergira funkcija $u(x,t)$ k stacionarni vrednosti $u_\infty(x,t) = x$.



□

(3) Poišči porazdelitev temperature v $20cm$ dolgi bakreni palici, če imata oba konca ves čas temperaturo $300K$, na začetku pa je temperatura palice porazdeljena po zakonu

$$u(x,0) = 300K + 50K \cdot \sin\left(\tfrac{\pi x}{20}\right).$$

Kdaj bo maksimalna temperatura v palici padla pod $50°C$?

Rešitev: Naloga nas sprašuje po rešitvi toplotne enačbe

$$u_t = k^2 u_{xx},$$

ki zadošča robnima pogojema

$$u(0,t) = u(20,t) = 300K$$

in začetnemu pogoju

$$u(x,0) = 300K + 50K \cdot \sin\left(\tfrac{\pi x}{20}\right).$$

Partikularna rešitev je enaka

$$u_p(x) = 300K,$$

rešitev $u_0(x,t)$ pa lahko zapišemo v obliki

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 \frac{\pi^2}{20^2} k^2 t} \sin(\tfrac{n\pi x}{20}),$$

Iz začetnega pogoja sledi, da je $B_1 = 50K$, vsi ostali koeficienti pa so enaki nič. Ohlajanje palice torej lahko opišemo s funkcijo

$$u(x,t) = 300K + 50K \cdot e^{-\frac{\pi^2}{20^2} k^2 t} \sin(\tfrac{\pi x}{20}).$$

Koeficient k^2 je odvisen od materiala, iz katerega je narejena palica. Izračunamo ga lahko po formuli

$$k^2 = \frac{\kappa}{\sigma \rho},$$

kjer je:

$\kappa \ldots$ toplotna prevodnost,

$\sigma \ldots$ specifična toplota,

$\rho \ldots$ gostota.

Za baker lahko uporabimo naslednje podatke:

$$\kappa = 401\tfrac{W}{mK},$$
$$\sigma = 390\tfrac{J}{kgK},$$
$$\rho = 8920\tfrac{kg}{m^3}.$$

Od tod dobimo vrednost parametra

$$k^2 = 1.15\tfrac{cm^2}{s}$$

in rešitev toplotne enačbe

$$u(x,t) = 300K + 50K \cdot e^{-0.028t}\sin(\tfrac{\pi x}{20}).$$

Pri tem je x merjen v centimetrih, t pa v sekundah. Vrednost $u(x,t)$ limitira k enakomerni porazdelitvi temperature $u(x,t) = 300K$, v vsakem trenutku pa je maksimum dosežen pri $x = 10$. Zanima nas čas t, pri katerem bo ta maksimum enak $50°C = 323K$. Dobimo ga iz enačbe

$$300K + 50K \cdot e^{-0.028t} = 323K,$$

njegova numerična vrednost pa je enaka

$$t = \frac{\ln\left(\frac{23}{50}\right)}{-0.028}s \approx 28s.$$

□