Naloge s starih kolokvijev in izpitov

Kombinatorika IŠRM, 2. letnik

1. Označimo z a_n število besed dolžine n nad abecedo $\{A, E, O, U, B, P, X\}$, pri katerih se samoglasniki vedno pojavljajo v parih oblike AA, EE, OO ali UU in pred vsemi soglasniki. Na primer, besedi $AAEEPXP$ in $AAAA$ sta ustrezni, besedi $UUUB$ in $AAXBAAX$ pa ne.

   (a) Pokažite, da za zaporedje (a_n) velja

   $$a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \quad \text{in} \quad a_n = 4a_{n-2} + 3^n \quad \text{za} \quad n \geq 2.$$

   (b) Poiščite rodovno funkcijo za zaporedje (a_n).

   (c) S pomočjo rodovne funkcije poiščite eksplicitno formulo za a_n.

2. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno z

   $$a_0 = 1 \quad \text{in} \quad a_{n+1} = 2a_n + 4^n \quad \text{za} \quad n \geq 0.$$

   (b) Poiščite rodovno funkcijo za zaporedje (a_n).

   (c) S pomočjo rodovne funkcije poiščite eksplicitno formulo za a_n.

3. Naj bo a_n število n-mestnih števil, ki vsebujejo sodo število ničel. Zapišite rekurzivno enačbo, ki ji ustreza zaporedje (a_n), in jo rešite.

4. Naj bo $c(n, k)$ število permutacij na množici $\{1, 2, \ldots, n\}$, ki imajo natanko k ciklov (vključno s cikli dolžine 1). Dodatno definirajmo $c(0, k) = 0$ za $k > 0$, $c(n, 0) = 0$ za $n \geq 1$ in $c(0, 0) = c(n, n) = 1$. Pokažite, da velja:

   (a) $\sum_{k=1}^{n} c(n, k) = n!$ za $n \geq 1$.

   (b) $c(n, 1) = (n-1)!$ za $n \geq 1$.

   (c) $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$ za $n \geq 2$.

   (d) $\sum_{k=1}^{n} c(n, k)x^k = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)$ za $n \geq 1$.

5. S pomočjo Ferrersovih diagramov pokažite, da je število particij naravnega števila n na natanko tri sumande enako številu particij n na števila, od katerih je največji sumand enak 3. Nato zapišite rodovno funkcijo za število particij naravnega števila n na natanko tri sumande.

6. Imamo 6 kopij prve knjige, 7 kopij druge knjige in 11 kopij tretje knjige.

   (a) Zapišite rodovno funkcijo izbire knjig, če moramo izbrati vsaj dve kopiji iste knjige.

   (a) Na koliko načcinov lahko rezdelimo knjige med dva učitelja, tako da vsak učitelj dobi 12 knjig in dobi vsaj dve kopiji iste knjige?

7. Zapišite in rešite sistem rekurzivnih enačb, s pomočjo katerega lahko določite število zaporedij dolžine n, ki jih sestavljamo iz znakov $0, 1, 2, 3$, in v katerih nastopa liho enk in liho dvojk.

8. Elemente množice $X = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$ zložimo v kvadratno matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}.$$

   Za vsak x, $0 \leq x \leq 15$, definiramo blok B_x, ki vsebuje vse elemente, ki so v isti vrstici ali istem stolpcu matrike A kot x, razen x. Naj bo $\mathcal{B} = \{B_x; 0 \leq x \leq 15\}$. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ načrt in poiščite njegove parametre. Ali je $\mathcal{B}$ 2-načrt? Ali je $\mathcal{B}$ 3-nacrt? V primeru pozitivnega odgovora tudi poiščite ustrezne parametre.

9. Preverite, da je množice $S = \{0, 1, 4, 6\} \subseteq \mathbb{Z}_{13}$ množica razlik in konstruirajte ustrezni 2-načrt. Zapišite tudi njegove parametre.

10. Za katere $k \in \{3, \dots, 10\}$ obstaja množica razlik moči k v $\mathbb{Z}_{13}$? Če množica razlik obstaja, konstruirajte tudi ustrezen 2-načrt. Kakšni so njegovi parametri?

11. Pokažite, da Steinerjev četvorček, to je 3-načrt s parametri $(v, 4, 1)$, lahko obstaja le, če je v kongruenten 2 ali 4 po modulu 6.

12. Naj bodo točke incidenčne strukture $\mathcal{C}$ vektorji v $\mathbb{F}_2^4$, bloki pa naj bodo 4-elementne množice $\{w, x, y, z\}$, $w, x, y, z \in \mathbb{F}_2^4$, za katere velja $w + x + y + z = 0$.

    (a) Pokažite, da je $\mathcal{C}$ 3-načrt s parametri $(v, k, 3)$ in določite parametre λ, k in v.

    (b) Koliko blokov ima načrt $\mathcal{C}$? V koliko blokih je vsebovana vsaka izmed točk načrta $\mathcal{C}$?

    (c) Kateri načrt dobimo, če za točke vzamemo točke načrta $\mathcal{C}$ brez točke (vektorja) 0, za bloke pa vse bloke načrta $\mathcal{C}$, ki vsebujejo točko 0 (in vsakemu takemu bloku odstranimo 0)?

13. Naj bodo točke incidenčne strukture $\mathcal{D}$ povezave grafa K_6. Bloki $\mathcal{D}$ naj bodo vse takšne troelementne podmnožice množice povezav K_6, ki so bodisi povezave popolnega prirejanja K_6, bodisi povezave trikotnika (cikla dolžine 3) v K_6.

    (a) Pokažite, da je $\mathcal{D}$ 2-načrt s parametri $(v, k, 2)$ in določite parametre v, k in λ.

    (b) Koliko blokov ima načrt $\mathcal{D}$? V koliko blokih je vsebovana vsaka izmed točk načrta $\mathcal{D}$?