

## 2. izpit iz KOMBINATORIKE (IŠRM)

17. februar 2011

Priimek in ime: \_\_\_\_\_

Vpisna št.: \_\_\_\_\_ Vrsta: \_\_\_\_\_ Kolona: \_\_\_\_\_

- (25 točk) Na koliko načinov lahko izberemo tri števila iz množice  $\{1, 2, \dots, 100\}$  tako, da bo njihova vsota deljiva z 2 (vrstni red izbire ni pomemben, večkrat lahko izberemo isto število)?
- (20 točk) Koliko je števil med 1 in 1000000, ki niso niti popolni kvadrati niti popolni kubi?
- (30 točk) Označimo z  $a_n$  število besed dolžine  $n$  nad abecedo  $\{A, E, O, U, B, P, X\}$ , pri katerih se samoglasniki vedno pojavljajo v parih oblike  $AA$ ,  $EE$ ,  $OO$  ali  $UU$  in pred vsemi soglasniki. Na primer, besedi  $AAEPPXP$  in  $AAAA$  sta ustrezni, besedi  $UUUB$  in  $AAXBAA$  pa ne.

(a) Pokažite, da za zaporedje  $(a_n)$  velja

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \quad \text{in} \quad a_n = 4a_{n-2} + 3^n \quad \text{za} \quad n \geq 2.$$

(b) Poiščite rodovno funkcijo za zaporedje  $(a_n)$ .

(c) S pomočjo rodovne funkcije poiščite eksplicitno formulo za  $a_n$ .

- (25 točk) Dokažite naslednji trditvi.

(a) Če je  $K$  množica razlik v  $\mathbb{Z}_m$ , je tudi  $K + i$  množica razlik v  $\mathbb{Z}_m$  za vsak  $i \in \mathbb{Z}_m$ .

(b) Če v  $\mathbb{Z}_m$  obstaja množica razlik  $K$  moči  $k$ , potem obstaja tudi množica razlik  $K'$  moči  $k$ , ki vsebuje elementa 0 in 1.

*Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.*

*Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!*