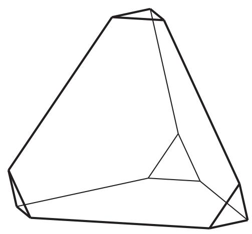
1. izpit iz Kombinatorike IŠRM

19. junij 2007

1. Naj bo $c(n, k)$ število permutacij na množici $\{1, 2, \dots, n\}$, ki imajo natanko k ciklov (vključno s cikli dolžine 1). Dodatno definirajmo $c(0, k) = 0$, za $k > 0$, $c(n, 0) = 0$, za $n \geq 1$, ter $c(0, 0) = c(n, n) = 1$. Pokaži, da velja:
   (a) $\sum_{k=1}^{n} c(n, k) = n!$, za $n \geq 1$.
   (b) $c(n, 1) = (n-1)!$, za $n \geq 1$.
   (c) $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1) \cdot c(n-1, k)$, za $n \geq 2$.
   (d) $\sum_{k=1}^{n} c(n, k) x^k = (x + n - 1)(x + n - 2) \dots (x + 1)$, za $n \geq 1$.

2. Telesu, ki ga dobimo iz tetraedra tako, da mu odsekamo vsa štiri oglišča (glej spodnjo skico), rečemo *prisekan tetraeder*. Naj bo G grupa rotacij tetraedra.



   (a) Zapiši ciklični indeks naravnega delovanja grupe G na ogliščih prisekanega tetraedra.
   (b) Na koliko bistveno različnih načinov (glede na grupo rotacij G) lahko pobarvamo oglišča prisekanega tetraedra z belo in črno barvo, tako da bo belih in črnih oglišč enako mnogo?
   (c) (+10 točk) Kateri dobro znani grupi je izomorfna grupa G?

3. Reši rekurzivno enačbo

$$a_{n+3} - 7a_{n+2} + 16a_{n+1} - 12a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$$

   pri pogojih $a_0 = -2$, $a_1 = 2$ in $a_2 = 14$.

4. Naj bodo točke incidenčne strukture $\mathcal{C}$ vektorji v $\mathbb{F}_2^4$, bloki pa naj bodo 4-elementne množice $\{w, x, y, z\}$, $w, x, y, z \in \mathbb{F}_2^4$, za katere velja $w + x + y + z = 0$.
   (a) Pokaži, da je $\mathcal{C}$ 3-načrt $S_\lambda(3, k, v)$ in določi parametre λ, k in v.
   (b) Koliko blokov ima načrt $\mathcal{C}$? V koliko blokih je vsebovana vsaka izmed točk načrta $\mathcal{C}$?
   (c) Kateri načrt dobimo, če za točke vzamemo točke načrta $\mathcal{C}$ brez točke (vektorja) 0, za bloke pa vse bloke načrta $\mathcal{C}$, ki vsebujejo točko 0 (in vsakemu takemu bloku odstranimo 0)?

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so po točkah enakovredne.
Odgovore je treba natančno utemeljiti!