3. izpit iz Kombinatorike (IŠRM)

1. september 2006

1. Na koliko različnih načinov lahko preuredimo črke imena

   LAPPEENRANTA

   tako, da ne bosta skupaj dve enaki črki?

   (Lappeenranta je mesto na Finskem.)

   Kratka rešitev: Po formuli vključitve in izključitve napišemo

$$\tfrac{12!}{3!2!2!2!} - \Big(\big(\big(\tfrac{11!}{2!2!2!} - \tfrac{10!}{2!2!2!}\big) + 3\tfrac{11!}{3!2!2!}\big) - \big(3\big(\tfrac{10!}{2!2!} - \tfrac{9!}{2!2!}\big) + 3\tfrac{10!}{2!3!}\big) + \big(3\big(\tfrac{9!}{2!} - \tfrac{8!}{2!}\big) + \tfrac{9!}{3!}\big) - (8! - 7!)\Big) = 3301200.$$

   Opomba: Zakaj je potrebno odštevanje v npr. $\frac{11!}{2!2!2!} - \frac{10!}{2!2!2!}$?

2. Koliko celoštevilskih rešitev (x_1, x_2, x_3, x_4) ima enačba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

   pri omejitvah

$$1 \le x_1 \le 6, \quad 1 \le x_2 \le 7, \quad 1 \le x_3 \le 8, \quad 1 \le x_4 \le 9\,?$$

   Kratka rešitev: Rodovne funkcije izbir vrednosti za posamezne spremenljivke so $F_1(x) = x + x^2 + \cdots + x^6$, $F_2(x) = x + x^2 + \cdots + x^7$, $F_1(x) = x + x^2 + \cdots + x^8$, $F_4(x) = x + x^2 + \cdots + x^9$. Rodovna funkcija izbire vrednosti za vse spremenljivke je produkt $F(x) = F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_4(x)$. Rešitev naloge je koeficient $F(x)$ pri x_{20}. To je 217 – čeprav vam tega ni treba izračunati. (Naloga je praktično enaka tisti z vaj, kjer smo šteli izbire iz kupa raznobarvnih balonov...)

3. Reši rekurzivno enačbo

$$(n+1)\,a_{n+1} = (2n+4)\,a_n$$

   pri začetnem pogoju $a_0 = 3$.

   Nasvet: Z uporabo ustrezne operacije in substitucij prevedi enačbo na linearno rekurzivno enačbo s konstantnimi koeficienti.

   Kratka rešitev: Če $(n+1)\,a_{n+1} = 2(n+2)\,a_n$ na obeh straneh logaritmiramo (logaritem z osnovo 2), dobimo

$$\log(n+1) + \log a_{n+1} = 1 + \log(n+2) + \log a_n$$

   Označimo $b_n = \log a_n$ in $c_n = \log(n+1)$. Dobimo

$$c_n + b_{n+1} = 1 + c_{n+1} + b_n$$

   oziroma

$$b_{n+1} - c_{n+1} = b_n - c_n + 1.$$

Sedaj označimo $d_n = b_n - c_n$. Dobimo prav enostavno linearno enačbo

$$d_{n+1} - d_n = 1.$$

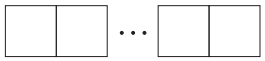
Ko jo rešimo in upoštevamo vse zgornje substitucije, dobimo rešitev

$$a_n = C \cdot 2^n(1+n)$$

Začetni pogoj $a_0 = 3$ da $C = 3$.

(Trik z logaritmiranjem smo uporabili tudi na vajah.)

4. Trak je sestavljen iz n enakih kvadratkov, kot na spodnji sliki.



Vsak kvadratek pobarvamo na obeh straneh traku z belo ali črno barvo (obe strani kvadratka sta lahko pobarvani z isto ali pa različno barvo).

(a) Koliko bistveno različnih trakov lahko dobimo na ta način?

(b) Koliko bistveno različnih trakov lahko dobimo na ta način, če uporabimo vsako od barv enako mnogokrat?

Kratka rešitev: Naloge se lotimo s teorijo Pólye. Kvadratke na eni strani označimo z $1, 2, \ldots, n$, na drugi pa z $1', 2', \ldots, n'$ in predpostavimo, da je n sod (za lihe n se ciklični indeksi permutacij nekoliko razlikujejo). Simetrije traku (in ciklični indeksi) so:

$$\begin{array}{rl}
\text{identiteta} & x_1^{2n} \\
(1\,n)(2\,n-1)\cdots(1'\,n')(2'\,(n-1)')\cdots & x_2^n \\
(1\,1')(2\,2')\cdots(n\,n')\cdots & x_2^n \\
(1\,n')(2\,(n-1)')\cdots(1'\,n)(2'\,(n-1))\cdots & x_2^n
\end{array}$$

Ciklični indeks grupe avtomorfizmov je torej $Z = \frac{1}{4}(x_1^{2n} + 3x_2^n)$. Rešitev točke (a) dobimo, če namesto x_i vstavimo 2 (imamo dve barvi).

V Z nadomestimo $x_i = b^i + c^i$. Vemo, da koeficient npr. pri $b^j c^k$ v tej "rodovni funkciji barvanj" pomeni število barvanj, v katerih uporabimo b(elo) j-krat, c(rno) pa k-krat. Rešitev točke (b) je koficient pri $b^n c^n$ (dovolj bi bil ta opis).

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so po točkah enakovredne.
Odgovore je treba natančno utemeljiti!

Rezultati bodo objavljeni na
`http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=57`