

Spernerjev izrek, načrti

1. Naj bo $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, kjer so p_i različna praštevila. Pokažite, da ima tedaj N kvečjemu $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ deliteljev, od katerih nobeden ne deli drugega.

Nasvet: vsakemu delitelju priredite primerno množico in nato uporabite Spernerjev izrek.

2. Dana so realna števila a_1, a_2, \dots, a_n , ki so vsa večja ali enaka 1. Pokažite, da tedaj obstaja kvečjemu $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ vsot oblike $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, ki so po absolutni vrednosti manjše od 1.

3. Za katere od spodnjih parametrov obstaja načrt s takšnimi parametri? Utemeljite, zakaj ne obstaja oziroma ga konstruirajte.

(a) (6, 3, 1)

(b) (5, 2, 1)

(c) (9, 6, 4)

4. Naj bo \mathcal{B} načrt s parametri (v, k, λ) , ki vsebuje vse k -podmnožice v -množice. Koliko je λ ?

5. Naj bo \mathcal{B} načrt s parametri (v, k, λ) nad množico X in $\mathcal{B}' = \{X \setminus B; B \in \mathcal{B}\}$ komplementi množic iz \mathcal{B} . Pokažite, da je tudi \mathcal{B}' načrt in poiščite njegove parametre.

6. Naj bo $X = E(K_5)$, v množici blokov \mathcal{B} pa naj bodo vse množice povezav moči štiri naslednjih tipov $A : \{uv, uw, uz, ux\}$, $B : \{uv, vw, uw, zx\}$ in $C : \{uv, vw, wz, uz\}$. Pokažite, da je \mathcal{B} načrt s parametri (10, 4, 12).