

Rekurzivne enačbe, Catalanova števila

1. Koliko je nizov dolžine n iz znakov $0, 1, 2, 3$, pri katerih se 3 nikoli ne pojavi za 0 ? Primer: niz 331102 je ustrezen, niz 201133 pa ne. Zapišite ustrezno rekurzivno enačbo in jo rešite.
2. **Hanojski stolpiči.** Rešujemo naslednji problem: dane so tri palice, A , B in C . Na palici A je n obročev. Vsi obroči so različne velikosti. Vse obročje moramo prestaviti na palico B . Prenašati smemo samo po en obroč naenkrat, nikoli ne damo večjega obroča na manjšega. Palico C lahko uporabljamo kot pomožno vmesno odlagališče. Koliko najmanj prenosov je potrebnih, da opravimo to nalogo?
Zapišite in rešite ustrezno (nehomogeno) rekurzivno enačbo.
3. Koliko je dvojiških dreves s korenom na n vozliščih?
4. Naj bo a_n število načinov, na katere lahko v konveksen $(n+2)$ -kotnik narišemo $n-1$ diagonal, ki se med sabo ne sekajo (s tem $(n+2)$ -kotnik *trianguliramo*). Pokažite, da je a_n enak n -temu Catalanovemu številu za $n \geq 1$.
5. *Motzkinovo število* M_n je enako številu načinov, na katere lahko narišemo tetive na krogu med n danimi točkami tako, da poljubni dve tetivi nimata nobene skupne točke.
Poiščite rodovno funkcijo za Motzkinova števila.