Kombinatorika (IŠRM) - vaje 17, 17. december 2013

Odvod formalne potenčne vrste in rekurzivne enačbe

1. Zapišite rodovno funkcijo za zaporedje $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$; $a_n = n$.

2. Naj bo a_n število načinov za izbiro dveh različnih elementov iz množice z n elementi. Zapišite rodovno funkcijo za zaporedje (a_n).

3. Označimo z a_n število načinov, na katere lahko (enake) kovance razporedimo v vrste tako, da je vsaka vrsta neprekinjena in se vsak kovanec v višji vrsti dotika natanko dveh kovancev v spodnji vrsti. Pri tem je v najnižji vrsti natanko n kovancev.

   (a) Izračunajte a_1, a_2, a_3 in a_4.

   (b) Pokažite, da velja rekurzivna zveza

   $$a_n = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)a_j + 1.$$

   (c) Poiščite rodovno funkcijo za zaporedje (a_n).

4. Označimo s $f(n,k)$ število načinov, na katere lahko izberemo k števil iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ tako, da ne izberemo dveh zaporednih števil. Za vsak $k \geq 1$ definirajmo rodovno funkcijo $F_k(x) = \sum_{n \geq k} f(n,k)x^n$.

   (a) Izračunajte $F_1(x)$.

   (b) Pokažite, da za števila $f(n,k)$ velja naslednja rekurzivna zveza:

   $$f(n,k) = f(n-2, k-1) + f(n-1, k)$$

   pri pogoju $n \geq 2$ in $k \geq 1$.

   (c) S pomočjo rekurzivne zveze iz točke (b) pokažite, da velja

   $$F_k(x) = \frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k+1}} \quad \text{za} \quad k \geq 2.$$

   (d) Izračunajte $f(n,k)$.

5. Koliko je poti v ravnini od točke $(0,0)$ do točke $(2n, 0)$, ki nikoli ne zaidejo pod os x, če lahko delamo samo korake dolžine $\sqrt{2}$ v smereh $(1,1)$ in $(1,-1)$? Opomba: take poti imenujemo *Dyckove* poti.

6. Na koliko načinov lahko pridemo iz točke $(0,0)$ do točke $(n,0)$, ki nikoli ne zaidejo pod os x, če so dovoljeni le koraki oblike $(1,0)$, $(1,1)$ in $(1,-1)$? Zapišite rekurzivno enačbo in preverite, da ustreza Motzkinovim številom.

7. (Domača naloga)

   Schröderjevo število r_n je enako številu poti v ravnini od točke $(0,0)$ do točke (n,n), ki uporabljajo samo korake oblike $(1,1)$, $(1,0)$ in $(0,1)$ in nikoli ne zaidejo nad premico $y = x$. Poiščite rodovno funkcijo za Schröderjeva števila.

8. (Domača naloga) Označimo z a_n število načinov, na katere lahko tlakujemo lik v obliki stopnišča višine n z n pravokotniki. Na spodnji sliki so prikazana vsa tlakovanja za $n = 4$.

   (a) Izračunajte a_1, a_2 in a_3.

   (b) Poiščite rekurzivno zvezo, ki jim zadoščajo členi zaporedja (a_n) in preverite, da ustreza Catalanovim številom.