Naloga	1	2	3	4	5	Σ
Točke						

1. KOLOKVIJ
Linearna algeba, IŠRM

1. december 2010

Ime in priimek: GAŠPER ZADNIK Vpisna številka: 3 1 4 1 5 9 2 7 Koordinate: x y

1. Določi inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Inverz iščemo po Gaußovi metodi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] +$$

V1 ⟶ V1+ V2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] /:3$$

V3 ⟶ $\frac{1}{3}$ V3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] +$$

V2 ⟶ V2+ V3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] /:2$$

V2 ⟶ $\frac{1}{2}$ V2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Nastavek razširjene matrike za Gaußa ④

Vsaka "Gaußova" operacija $4 \times 3 =$ ⑫

Zapis rešitve ④

ALTERNATIVA

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverz zg. trikotne matrike je zg. trikotna matrika

$\Rightarrow a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$

Nastavek po metodi neznanih koeficientov ④

Utemeljitev, da pod diagonalo 0 ②

Množenje matrik ④

Zapis sistema ⑤

Rešitev + zapis A^{-1} = ⑤

(+2, či brez preizkusa $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$)

2. Določi enačbo ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje točko $(0,0,0)$ in se najbolje prilega točkam $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ ter $(0,1,1)$ v smislu minimizacije vsote kvadratov razdalj danih točk vzdolž osi z do ravnine.

Ravnino iščemo z nastavkom

Zapis nastavka ③

$$z = ax + by + c$$

Ker točka $(0,0,0)$ leži na Σ:

Pogoj $(0,0,0) \in \Sigma$ ④

$$0 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$$

Rešiti moramo predoločeni sistem za a, b, ki se glasi

Zapis predoločenega sistema ④

$(1,1,0)$ $\quad 0 = a + b$

$(1,0,1)$ $\quad 1 = a + 0$ $\quad$ oz. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(0,1,1)$ $\quad 1 = 0 + b$

Priredimo 2×2-sistem, množimo enačbo z $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$:

Prevod na 2×2-sistem ⑥

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{oz.} \quad \begin{aligned} 2a + b &= 1 \\ a + 2b &= 1 \quad /\cdot(-2) \end{aligned}$$

$$0\cdot a - 3b = -1 \Rightarrow b = \tfrac{1}{3}$$

$$a + 2b = 1 \Rightarrow a = \tfrac{1}{3}$$

Rešitev ③

oz. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right] /\cdot(-\tfrac{1}{2})$

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \tfrac{3}{2} & \tfrac{1}{2} \end{array}\right] /:(\tfrac{3}{2})$

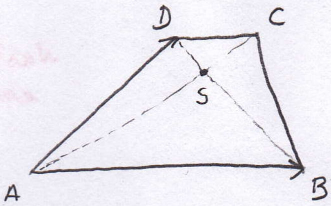
$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{3} \end{array}\right] /:2$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \tfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{3} \end{array}\right]$

Torej je enačba ravnine, ki vsebuje $(0,0,0)$ in se najbolje prilega danim trem točkam

$$z = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y.$$

3. Dan je trapez $ABCD$ (tj. štirikotnik z $AB \parallel CD$), v katerem $|AB| = 3|CD|$. V kakšnem razmerju presečišče diagonal deli diagonali?



$$\vec{AB} = \vec{a}$$
$$\vec{AD} = \vec{b}$$

Izbira baze (4)

$$\vec{AS} = \lambda \cdot \vec{AC} = \lambda(\vec{AD} + \vec{DC}) = \lambda(\vec{AD} + \tfrac{1}{3}\vec{AB}) = \lambda(\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{a})$$

$$\vec{AS} = \vec{AD} + \mu \vec{DB} = \vec{AD} + \mu(\vec{DA} + \vec{AB}) = \vec{b} + \mu(-\vec{b} + a)$$

Zapis $\vec{AS}$ (ali $\vec{BS}$...) na 2 načina (6)

$$\lambda \vec{b} + \tfrac{1}{3}\lambda \vec{a} = (1-\mu)\vec{b} + \mu \vec{a}$$

Zapis v bazi in izenačitev koeficientov (4)

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1 - \mu \qquad \Rightarrow \qquad \lambda + \mu = 1$$
$$\tfrac{1}{3}\lambda = \mu \qquad\qquad \tfrac{1}{3}\lambda - \mu = 0 \quad +$$

$$\tfrac{4}{3}\lambda = 1$$
$$\lambda = \tfrac{3}{4}$$
$$\mu = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}$$

Rešitev sistema (4)

Torej $|AS| = \frac{3}{4}|AC|$ oz. $|AS| : |SC| = 3 : 1$

in $|DS| = \frac{1}{4}|DB|$ oz. $|DS| : |SB| = 1 : 3$

Zapis razmerij (2)

4. Dana je ravnina Σ z enačbo $x + y + z = 1$. Določi enačbo kakšne premice skozi točko $(1, 1, 1)$, ki seka ravnino Σ pod kotom $\frac{\pi}{3}$ in seka tudi os z.

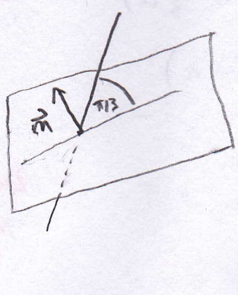
Premico iščemo z nastavkom

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c} \quad \text{ALI}$$

$$\{ (1,1,1) + t(a,b,c) \mid t \in \mathbb{R} \} \quad [\text{BOLJE}]$$

Nastavek za enačbo premice

3



Kot med premico in ravnino je $\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ kot med (a,b,c) (smerni vektor premice) in normalo ravnine je

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Kot med $\vec{n}$ in sm. vek. premice

2

Normalo ravnine preberemo iz enačbe:

$$\vec{n} = (1, 1, 1) \qquad \left(\|\vec{n}\| = \sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}} = \sqrt{3} \right)$$

Normala ravnine

2

Ker je $\sphericalangle\, \vec{n}, (a,b,c) = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \vec{n}\cdot(a,b,c) = a+b+c = \|\vec{n}\| \cdot \|(a,b,c)\| \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 3\,\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$$

Enačba iz kota med premico in ravnino

3

Naj bo smerni vektor premice enotski,

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$
$$\Rightarrow a+b+c = \frac{3}{2}$$

Postavitev dveh enačb za $\|(a,b,c)\|$ in $\vec{n}\cdot(a,b,c)$

2

Ker mora premica sekati z-os

$$\Rightarrow \exists\, t_0 : \quad (1,1,1) + t_0(a,b,c) = (0,0,z_0)$$
$$\Rightarrow (1+t_0a,\ 1+t_0b,\ 1+t_0c) = (0,0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1+t_0a = 0 \\ 1+t_0b = 0 \end{array} \Rightarrow a = b$$

Zapis pogoja, da seka z-os

4

Torej
$$a^2+a^2+c^2 = 1$$
$$a+a+c = 3/2$$

Iskana premica je npr. $\underline{(1,1,1) + t\left(\frac{6+\sqrt{6}}{12}, \frac{6+\sqrt{6}}{12}, \frac{3-\sqrt{6}}{6}\right)}$

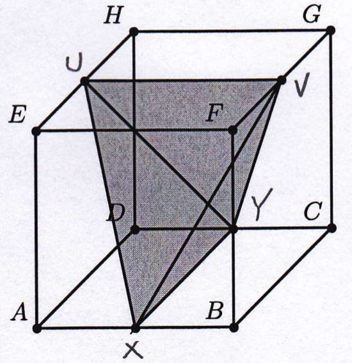
Rešitev sistema

4

$$c = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 1 = 2a^2 + \left(\frac{3}{2}-2a\right)^2 = 2a^2 + \frac{9}{4} - 6a + 4a^2 = 6a^2 - 6a + \frac{9}{4}$$

oz. $6a^2 - 6a + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{36-30}}{12} = \boxed{\frac{6\pm\sqrt{6}}{12}} \Rightarrow c = \frac{3}{2} - 2\,\frac{6\pm\sqrt{6}}{12} = \frac{9-(6\pm\sqrt{6})}{6} = \boxed{\frac{3\mp\sqrt{6}}{6}}$

5. V kocki $ABCDEFGH$ s stranico dolžine 1 naj bodo X, Y, U in V razpolovišča stranic AB, CD, EH in FG. Izračunaj volumen piramide $XYUV$.



Postavimo kocko v koordinatni sistem,

Postavitev kocke v koord. sistem (4)

$A = (0,0,0)$

$B = (1,0,0)$ ITD

$D = (0,1,0)$

$E = (0,0,1)$

Piramido XYUV napenjajo (npr.) vektorji $\vec{XU}$, $\vec{XV}$ in $\vec{XY}$,

Izbira & izračun 3 vektorjev, ki napenjajo piramido $3 \times 3 =$ (9)

$\vec{XU} = (0, \frac{1}{2}, 1) - (\frac{1}{2}, 0, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

$\vec{XV} = (1, \frac{1}{2}, 1) - (\frac{1}{2}, 0, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

$\vec{XY} = (\frac{1}{2}, 1, 0) - (\frac{1}{2}, 0, 0) = (0, 1, 0)$

Zapis formule za $V(XYUV)$ (2)

$V(XYUV) = \frac{1}{6} \left| (\vec{XU} \times \vec{XV}) . \vec{XY} \right|$

Vekt. produkt (3)
Skalarni produkt (2)
(ALI izračun det. ustrezne matrike (5))

$\vec{XU} \times \vec{XV} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = (0, 1, -\frac{1}{2})$

$(\vec{XU} \times \vec{XV}) . XY = (0, 1, -\frac{1}{2}) . (0,1,0) = 1$

$V(XYUV) = \frac{1}{6}$

ALTERNATIVA ... izbira baze, npr $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AE} = \vec{c}$

Izbira baze (3)

$\vec{XY} = \vec{b}$

$\vec{XU} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{XV} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Izrazitev 3 vektorjev ki napenjajo piramido $3 \times 3 =$ (9)

Zapis formule (2)

$V = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \times \left(\frac{1}{2}a + c + \frac{1}{2}b\right)\right) . \vec{b} = \dots$

$= \frac{1}{6}$

Vstavimo v formulo z izbrano bazo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (3)

Upoštevamo $|(\vec{a} \times \vec{b}) . \vec{c}| = 1$ (3)