Prvi kolokvij iz Linearne algebre

30. november 2005

1. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ dano število in $F\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ preslikava, podana s predpisom

$$(Fp)(t) = (tp(t))' + at^2 p(\tfrac{1}{t}) .$$

(a) Pokaži, da je preslikava F linearna.

(b) Določi matriko, ki ji pripada v standardnih bazah $\{1, t, t^2\}$.

(c) Določi a tako, da bo rang F čim manjši.

2. Preslikava $T\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kompozitum pravokotne projekcije na ravnino

$$x + y + z = 0$$

in vrtenja v tej ravnini za kot 90^o v eni od smeri. Določi matriko, ki pripada preslikavi T v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

3. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Za realni matriki

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

naj bo

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} ae & be & af & bf \\ ce & de & cf & df \\ ag & bg & ah & bh \\ cg & dg & ch & dh \end{bmatrix} .$$

(a) Naj bo $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^\top$ lastni vektor A za lastno vrednost λ in $\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^\top$ lastni vektor B za lastno vrednost μ. Pokaži, da je potem $\begin{bmatrix} xu & yu & xv & yv \end{bmatrix}^\top$ lastni vektor $A \otimes B$. Za katero lastno vrednost matrike $A \otimes B$?

(b) Recimo, da je 0 lastna vrednost za obe matriki A in B, obakrat z algebrajsko večkratnostjo 1. Kolikšna je v tem primeru algebrajska večkratnost 0 za matriko $A \otimes B$?