Prvi kolokvij iz Linearne algebre 2
26. november 2008

1. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja iz $\mathbb{R}^3$. Preslikava $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s pravilom

$$A\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x} - (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{a} - \vec{x}.$$

(a) Pokaži, da je preslikava A linearna.

(b) Določi matriko, ki preslikavi A ustreza v bazi $\mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$. Pomagaš si lahko z enakostjo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{z} = (\vec{u} \cdot \vec{z})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{z})\vec{u}.$$

(c) Kakšen pogoj morata izpolnjevati vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, da bo preslikava A bijektivna?

2. Linearna preslikava $B\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ je podana s pravilom

$$(Bp)(t) = (t^2 + 2t)p''(t) + (t+1)p'(t) - p(t).$$

(a) Napiši matriko, ki pripada preslikavi B v standardni bazi $\{1, t, t^2\}$.

(b) Določi kakšni bazi jedra in slike preslikave B.

3. Preslikava C poljuben vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ najprej pravokotno projicira na ravnino $x + y + z = 0$, nato pa dobljeno projekcijo še pravokotno projicira na premico $x = y = z$. Poišči matriko, ki preslikavi C pripada v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

4. Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave $D\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki je podana s pravilom

$$D(x, y, z) = (x - z, x + 2y + z, 2x + 2y + 3z).$$