

Prvi kolokvij iz Linearne algebre 2

20. november 2009

Priimek in ime: Vpisna št.:

--	--	--	--	--	--	--	--

1. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$T(X) = AX - XB.$$

- (a) Pokaži, da je preslikava T linearna.
- (b) Poišči matriko, ki preslikavi T ustreza v standardni bazi $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, pri čemer E_{ij} pomeni 2×2 matriko, ki ima na križišču i -te vrstice in j -tega stolpca enko, drugje pa ničle.
- (c) Poišči kakšni bazi jedra in slike preslikave T . Ali je preslikava T bijektivna?

2. Preslikava Z je zrcaljenje čez ravnino $x + y + z = 0$, preslikava V pa je vrtenje okrog premice $x = y = z$ za pravi kot v eni od smeri. Poišči matriki, ki ustrezata preslikavama ZV in VZ v standardnih bazah prostora \mathbb{R}^3 .

3. Na prostoru $P_2(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ dva so dani funkcionali

$$f(p) = p(1), \quad g(p) = p'(1) \quad \text{in} \quad h(p) = 3 \int_{-1}^1 p(t) dt.$$

- (a) Poišči matrike, ki pripadajo funkcionalom f , g in h iz standardne baze polinomov $\{1, t, t^2\}$ v standardno bazo realnih števil $\{1\}$.
- (b) Pokaži, da je množica $\{f, g, h\}$ baza dualnega prostora $P_2(\mathbb{R})^*$.
- (c) V $P_2(\mathbb{R})$ poišči bazo, ki je dualna bazi $\{f, g, h\}$.

4. Naj bosta a in b realni števili. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & a & -b \\ b & b & b & b & a \end{bmatrix}.$$