

Drugi kolokvij iz Linearne algebre 2

8. januar 2008

1. Za nilpotentno linearno preslikavo $A: \mathbb{C}^{10} \rightarrow \mathbb{C}^{10}$ velja

$$\dim(\ker A^3) = 9 \quad \text{in} \quad \dim(\ker A^2) = 7.$$

Poišči matrike vseh možnih Jordanovih form za A . Pri vsaki možnosti zapiši še ustrezen minimalni in karakteristični polinom ter izračunaj dimenzijo $\ker A$.

2. Poišči Jordanovo formo in ustrezno prehodno matriko za matriko

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. V prostoru $P_2(\mathbb{R})$ realnih polinomov stopnje največ dva je podano pravilo

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p'(t)q'(t) dt + p(0)q(0).$$

(a) Pokaži, da je to pravilo skalarni produkt na $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Poišči kakšno bazo ortogonalnega komplementa prostora $\mathcal{L}\{t^2 + t + 1\}$.

4. V prostoru $C[0, 1]$ zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$ je podan skalarni produkt

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Kateri linearni polinom je najbližje funkciji $h(t) = e^t$ glede na normo, ki jo porodi ta skalarni produkt? (*Nasvet:* Izračunaj pravokotno projekcijo funkcije h na podprostor $\mathcal{L}\{1, t\}$. Pravilo za per partes: $\int u dv = uv - \int v du$.)