Linearna algebra

Jaka Cimprič

Kazalo

POGLAVJE 1

Afine množice v $\mathbb{R}^n$

1.1. Urejene n-terice

Naj bo n neko fiksno naravno število (običajno je $n = 2$ ali $n = 3$). Množico vseh urejenih n-teric realnih števil označimo z $\mathbb{R}^n$. Množico $\mathbb{R}^n$ si predstavljamo kot n-razsežen prostor z izbranim koordinatnim sistemom, urejeno n-terico $(x_1, \ldots, x_n)$ pa si lahko predstavljamo kot točko v n-razsežnem prostoru, ki ima v izbranem koordinatnem sistemu koordinate $(x_1, \ldots, x_n)$. Točki $(0, \ldots, 0)$ pravimo tudi **izhodišče**.

Geometrijski vektor je usmerjena daljica med dvema točkama. Geometrijskemu vektorju, ki se začne v izhodišču pravimo tudi **algebrski vektor**, na kratko pa kar **vektor**. Algebrski vektor je natanko določen s svojo končno točko, ta pa je natanko določena z n-terico svojih koordinat. Zato bomo v nadaljevanju besede urejena n-terica, točka v $\mathbb{R}^n$ in (algebrski) vektor uporabljali kot sinonime. Pravimo, da sta dva geometrijska vektorja **enaka**, če sta vzporedna, enako dolga in kažeta v isto smer. Vsak geometrijski vektor lahko vzporedno premaknemo tako, da njegov rep pade v izhodišče. Torej je vsak geometrijski vektor enak natanko enemu algebrskemu vektorju. Koordinate algebrskega vektorja, ki je enak geometrijskemu vektorju iz točke $(x_1, \ldots, x_n)$ v točko $(y_1, \ldots, y_n)$, so $(y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Algebrske vektorje lahko seštevamo in jih množimo s skalarji, tj. realnimi števili. **Vsota** vektorjev $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ je vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Ta vektor lahko konstruiramo tako, da rep vektorja $\mathbf{y}$ z vzporednim premikom prestavimo na glavo vektorja $\mathbf{x}$ in povežemo rep $\mathbf{x}$ z glavo premaknjenega $\mathbf{y}$. **Produkt** vektorja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in skalarja α je vektor $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$. Če je $\alpha > 0$, potem $\alpha\mathbf{x}$ dobimo tako, da $\mathbf{x}$ raztegnemo za faktor α. Če pa je $\alpha < 0$, potem $\alpha\mathbf{x}$ dobimo tako, da $\mathbf{x}$ raztegnemo za faktor $|\alpha|$ in ga prezrcalimo preko izhodišča. Osnovne lastnosti seštevanja in množenja s skalarjem so:

(i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,	(v) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$,
(ii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,	(vi) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$,
(iii) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$,	(vii) $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$,
(iv) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} + \mathbf{0}$,	$(viii)$ $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Pravimo, da je vektor $\mathbf{x}$ **linearna kombinacija** vektorjev $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$, če obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, da velja $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{x}_m$.

Primer. Dana je daljica AB. Iščemo tako točko C na tej daljici, da velja $\overline{AC} : \overline{CB} = \lambda : \mu$. Označimo z $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ in $\mathbf{r}_C$ algebrske vektorje, ki ustrezajo točkam A, B in C. Radi bi izrazili $\mathbf{r}_C$ z $\mathbf{r}_A$ in $\mathbf{r}_B$. Ker je $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ in $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}$, je

$$\mathbf{r}_C = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{AC} = \mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu \mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B).$$

Primer. Točki $\frac{1}{m}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_m)$ pravimo **središče** točk $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$. Ogledali si bomo geometrijsko konstrukcijo središča točk. Naj bo $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$. Za vsak $i = 2, \ldots, m$ naj bo $\mathbf{p}_i$ taka točka na daljici med $\mathbf{p}_{i-1}$ in $\mathbf{r}_i$, ki to daljico deli v razmerju $1 : (i-1)$. Trdimo, da je potem $\mathbf{p}_m$ središče točk $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$.

Ker je $\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1$ in ker za vsak $i = 2, \ldots, m$ velja

$$\mathbf{p}_i = \frac{i-1}{i}\mathbf{p}_{i-1} + \frac{1}{i}\mathbf{r}_i,$$

lahko s popolno indukcijo dokažemo, da je

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{i}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i)$$

za vsak $i = 1, \ldots, m$. Trditev namreč drži za $i = 1$ in če velja za i, potem velja tudi za $i+1$, saj je $\mathbf{p}_{i+1} = \frac{i}{i+1}\mathbf{p}_i + \frac{1}{i+1}\mathbf{r}_{i+1} = \frac{i}{i+1} \cdot \frac{1}{i}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i) + \frac{1}{i+1}\mathbf{r}_{i+1} = \frac{1}{i+1}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i) + \frac{1}{i+1}\mathbf{r}_{i+1} = \frac{1}{i+1}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1})$. Posebej je $\mathbf{p}_m = \frac{1}{m}(\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{r}_m)$, kar smo tudi želeli dokazati.

Vektorji $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ so **linearno odvisni**, če je eden od njih enak linearni kombinaciji preostalih $m-1$ vektorjev, sicer pa pravimo, da so **linearno neodvisni**.

Primer. Dva vektorja sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko ne ležita na isti premici skozi izhodišče. Trije vektorji so linearno neodvisni natanko tedaj, ko ne ležijo na isti ravnini skozi izhodišče.

Če so vektorji $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m$ linearno neodvisni in velja

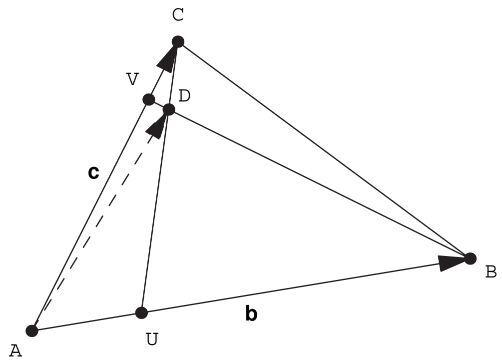
$$\alpha_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{r}_m = \beta_1 \mathbf{r}_1 + \ldots + \beta_m \mathbf{r}_m,$$

za neke skalarje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$, potem je

$$\alpha_i = \beta_i \text{ za vsak } i = 1, \ldots, m.$$

Oglejmo si primer uporabe te lastnosti.

Primer. Vzemimo trikotnik s oglišči A, B, C. Naj bo U taka točka na daljici AB, da je $\overline{AU} : \overline{UB} = 1 : 3$ in naj bo V taka točka na daljici AC, da velja $\overline{AV} : \overline{VC} = 4 : 1$. Naj bo točka D presečišče daljic CU in BV. Izrazimo vektor $\overrightarrow{AD}$ z vektorjema $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ in $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$!



Ker je $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{4}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AV} = \frac{4}{5}\mathbf{c}$, $\overrightarrow{UC} = \mathbf{c} - \frac{1}{4}\mathbf{b}$ in $\overrightarrow{VB} = \mathbf{b} - \frac{4}{5}\mathbf{c}$, velja

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AU} + \lambda\overrightarrow{UC} = \frac{1}{4}\mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \frac{1}{4}\mathbf{b}) = \frac{1-\lambda}{4}\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$$

in

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AV} + \mu\overrightarrow{VB} = \frac{4}{5}\mathbf{c} + \mu(\mathbf{b} - \frac{4}{5}\mathbf{c}) = \mu\mathbf{b} + \frac{4(1-\mu)}{5}\mathbf{c},$$

kjer skalarjev λ in μ še ne poznamo. Ker sta $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ linearno neodvisna, odtod sledi, da je

$$\frac{1-\lambda}{4} = \mu \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{4(1-\mu)}{5}.$$

Rešitev tega sistema je $\lambda = \frac{3}{4}$ in $\mu = \frac{1}{16}$. Torej je $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{16}\mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{c}$.

1.2. Norma, skalarni in vektorski produkt

Za vsak vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo njegovo **normo**

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Po Pitagorovem izreku je $\|\mathbf{x}\|$ ravno oddaljenost točke $\mathbf{x}$ od izhodišča, razdaljo med dvema točkama $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ pa lahko izrazimo kot $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Namesto $\|\overrightarrow{AB}\|$ pišemo raje $\overline{AB}$.

Skalarni produkt vektorjev $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ je definiran z

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Zveza med skalarnim produktom in normo je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$. Osnovni algebrski lastnosti skalarnega produkta sta

(1) $\langle \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ter $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ in

(2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ za vse $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz je tako preprost, da ga prepustimo bralcu.

Primer. Dokažimo, da za vsak paralelogram $ABCD$ velja

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2).$$

Pišimo $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$. Potem je

$$\overline{AB} = \|\mathbf{a}\|, \quad \overline{AD} = \|\mathbf{b}\|, \quad \overline{AC} = \|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \quad \text{in} \quad \overline{BD} = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|.$$

Formula sedaj sledi iz računa $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 = \langle \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b} \rangle = (\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + (\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) = 2(\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle) = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$.

Oglejmo si sedaj, kako si skalarni produkt vektorjev $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ geometrijsko predstavljamo. Najprej narišimo trikotnik $\triangle OAB$, kjer je $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$ in $\mathbf{y} = \overrightarrow{OB}$. Kot pri O označimo s ϕ, projekcijo točke A na premico OB pa z D. Po Pitagorovem izreku je $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$. Ker je $\overline{AD} = \overline{OA} \sin\phi$ in $\overline{DB} = |\overline{OB} - \overline{OD}| = |\overline{OB} - \overline{OA}\cos\phi|$, dobimo

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{OA}\;\overline{OB}\cos\phi.$$

Tej formuli pravimo **kosinusni izrek**. Če vanjo vstavimo

$$\overline{OA} = \|\mathbf{x}\|, \quad \overline{OB} = \|\mathbf{y}\| \quad \text{in} \quad \overline{AB} = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|,$$

dobimo

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi.$$

Po drugi strani je

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Po krajšanju dobimo formulo

$$\boxed{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi.}$$

Ta formula ima dve pomembni posledici. Prva je ta, da sta neničelna vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ pravokotna natanko tedaj, ko je $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. To sledi iz dejstva, da je $\cos\phi = 0$ natanko tedaj, ko je $\phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Druga posledica je ocena za normo vsote. Vzemimo poljubna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ in označimo s ϕ kot med njima. Ker je $-1 \leq \cos\phi \leq 1$, se število $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\;\|\mathbf{y}\|\cos\phi$ nahaja med $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 -$

$2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|)^2$ in $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$. Odtod sledi, da je

$$\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leq \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Desni strani te ocene pravimo **trikotniška neenakost**.

Za dva vektorja iz $\mathbb{R}^3$ lahko definiramo tudi njun **vektorski produkt**. Če je

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{in} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

potem definiramo

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Osnovne algebrske lastnosti vektorskega produkta so:

- $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
- $\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ za vsak $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ in $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$,
- $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ za vsak $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Geometrijski pomen vektorskega produkta $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ je naslednji.

- Dolžina vektorja $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ je $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \sin\phi$, kjer je ϕ kot med vektorjema $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$.
- Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ leži na premici skozi izhodišče, ki je pravototna tako na vektor $\mathbf{x}$ kot na vektor $\mathbf{y}$.
- Smer vektorja $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ določimo s **pravilom desnega vijaka**. Desni mezinec položimo na vektor $\mathbf{x}$ tako, da prsti kažejo v smeri vektorja $\mathbf{y}$. Potem palec kaže v smeri vektorja $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

Dokaz teh lastnosti prepustimo bralcu.

1.3. Premice v $\mathbb{R}^n$

Premico v $\mathbb{R}^n$ najpogosteje podamo s točko na premici in vektorjem v smeri premice. Če je $\mathbf{x}_0$ dana točka na premici in $\mathbf{p}$ dani vektor v smeri premice, potem poljubno točko $\mathbf{x}$ na tej premici izrazimo kot

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p},$$

kjer je t poljubno realno število. Spremenljivki t pravimo **parameter**, enačbi pa **parametrična enačba** premice. Če je $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ in $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, potem lahko parametrično enačbo zapišemo po komponentah kot

$$x_1 = x_{01} + tp_1, \ldots, x_n = x_{0n} + tp_n.$$

Če se požvižgamo na morebitno deljenje z nič, potem lahko zapišemo

$$t = \frac{x_1 - x_{01}}{p_1} = \ldots = \frac{x_n - x_{0n}}{p_n}.$$

Tej enačbi pravimo **normalna enačba** premice.

Primer. Poiščimo normalno enačbo premice v $\mathbb{R}^3$, ki gre skozi točki $\mathbf{x}_1 = (0, -2, 1)$ in $\mathbf{x}_2 = (3, -2, -1)$.

Najprej poiščemo točko $\mathbf{x}_0$ na premici in vektor $\mathbf{p}$ v smeri premice. Vzemimo na primer

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 = (0, -2, 1) \quad \text{in} \quad \mathbf{p} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (3, 0, -2).$$

Normalna enačba se potem glasi

$$t = \frac{x_1}{3} = \frac{x_2 + 2}{0} = \frac{x_3 - 1}{-2}.$$

Najpogostejše naloge s premicami so:

- pravokotna projekcija točke na premico,
- zrcaljenje točke čez premico in
- razdalja točke od premice.

Če je premica podana z normalno enačbo, jo najprej pretvorimo v parametrično enačbo, saj je ta najprimernejša za računanje.

Recimo torej, da bi radi pravokotno projecirali točko $\mathbf{x}_1$ na premico $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p}$. Iskano točko označimo z $\mathbf{x}_1'$. Ker točka $\mathbf{x}_1'$ leži na premici, obstaja tak parameter t', da velja

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_0 + t'\mathbf{p}.$$

Parameter t' moramo določiti tako, da je vektor $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1'$ pravokoten na vektor $\mathbf{p}$. Potem je $0 = \langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1', \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p} \rangle - t' \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle$. Odtod sledi, da je

$$t' = \frac{\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle}.$$

Torej je

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_0 + \frac{\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p}.$$

Sedaj lahko izračunamo tudi oddaljenost točke $\mathbf{x}_1$ od premice $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p}$ in njeno zrcalno sliko $\mathbf{x}_1''$ glede na to premico. Velja

$$d = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1'\| \quad \text{in} \quad \mathbf{x}_1'' = 2\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}_1.$$

Zadnja formula sledi iz dejstva, da je $\mathbf{x}_1'$ ravno razpolovišče daljice med $\mathbf{x}_1$ in $\mathbf{x}_1''$, se pravi $\mathbf{x}_1' = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1'')$.

Kadar smo v $\mathbb{R}^3$, lahko pri računanju oddaljenosti točke $\mathbf{x}_1$ od premice $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{p}$ uporabimo vektorski produkt. Velja

$$d = \frac{\|(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|}.$$

Tako leva kot desna stran sta namreč enaki $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \sin\phi$, kjer je ϕ kot med vektorjema $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ in $\mathbf{p}$.

1.4. Linearne enačbe, hiperravnine

Enačbi oblike

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b,$$

kjer so $a_1, \ldots, a_n$ in b dana števila, $x_1, \ldots, x_n$ pa neznanke, pravimo **linearna enačba**. Vektor $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ je **rešitev** te enačbe, če velja $a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = b$. Označimo z $\mathcal{S}$ množico vseh rešitev gornje linearne enačbe. Imamo tri možnosti:

- če je $a_1 = \ldots = a_n = 0$ in $b = 0$, potem je $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$;
- če je $a_1 = \ldots = a_n = 0$ in $b \neq 0$, potem je $\mathcal{S} = \emptyset$;
- če je vsaj eden od $a_1, \ldots, a_n$ različen od nič, potem je $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathbb{R}^n$. V tem primeru množici $\mathcal{S}$ pravimo **hiperravnina** v $\mathbb{R}^n$.

Oglejmo si tretji primer z geometrijskega stališča. Označimo

$$\mathbf{n} = (a_1, \ldots, a_n).$$

Po predpostavki obstaja tak i, da je $a_i \neq 0$. Torej je $\mathbf{n}$ neničeln vektor. Označimo z $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ vektor spremenljivk. Linearno enačbo lahko sedaj zapišemo v obliki

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle = b.$$

Izberimo eno rešitev te linearne enačbe in jo označimo z $\mathbf{r}_0$. Lahko vzamemo na primer $\mathbf{r}_0 = \frac{b}{a_i}\mathbf{e}_i$, kjer je $\mathbf{e}_i$ vektor, ki ima na i-tem mestu enko, drugod pa same ničle. Če od enačbe $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle = b$ odštejemo število $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_0 \rangle = b$, dobimo ekvivalentno enačbo

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0.$$

Tej enačbi pravimo **normalna enačba** hiperravnine, vektorju $\mathbf{n}$ pa **normala**. Pove nam, da je hiperravnina ravno množica vseh točk $\mathbf{r}$, pri katerih je vektor iz točke $\mathbf{r}_0$ v točko $\mathbf{r}$ pravokoten na vektor $\mathbf{n}$.

Hiperravnine v $\mathbb{R}^2$ so ravno premice v $\mathbb{R}^2$, hiperravnine v $\mathbb{R}^3$ pa običajne ravnine v $\mathbb{R}^3$.

Primer. Poiščimo enačbo ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki gre skozi točke $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ in $\mathbf{r}_3$. Ta naloga je smiselna samo v primeru, ko vektorji ne ležijo na isti premici. V tem primeru je normala $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$ neničelna. Enačba ravnine se potem glasi $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 \rangle = 0$.

Normalna enačba je tudi zelo prikladna za računanje. Oglejmo si tri standardne naloge s hiperravninami:

- oddaljenost točke od hiperravnine,

- pravokotna projekcija točke na hiperravnino in
- zrcaljenje točke čez hiperravnino.

Recimo, da bi radi izračunali oddaljenost d točke $\mathbf{r}_1$ od hiperravnine $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$. Velja

$$d = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \cos \phi,$$

kjer je ϕ kot med vektorjema $\mathbf{n}$ in $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$. Pri določanju kota si pomagamo s formulo $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0\| \cos \phi$. Odtod dobimo

$$d = \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Pravokotno projekcijo $\mathbf{r}_1'$ točke $\mathbf{r}_1$ na hiperravnino $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$ dobimo tako, da izračunamo presek hiperravnine s premico $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{n}$. Formulo za premico vstavimo v formulo za hiperravnino in izrazimo t. Dobimo

$$t = -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}.$$

Ko ta t vstavimo v enačbo premice, dobimo

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}.$$

Kot pri premicah lahko zrcalno slike točke $\mathbf{r}_1$ preko hiperravnine dobimo tako, da upoštevamo, da je pravokotna projekcija $\mathbf{r}_1'$ ravno razpolovišče daljice med točko $\mathbf{r}_1$ in njeno zrcalno sliko $\mathbf{r}_1''$.

1.5. Sistemi linearnih enačb

Vektor iz $\mathbb{R}^n$ je rešitev sistema m linearnih enačb

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m,
\end{array}$$

če je rešitev od vsake posamezne enačbe. Če je $\mathcal{S}_i$ množica vseh rešitev i-te enačbe, potem je množica vseh rešitev gornjega sistema enaka

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{S}_m.$$

Množica vseh rešitev linearnega sistema je bodisi prazna bodisi enoelementna bodisi neskončna. V prvem primeru pravimo, da je sistem **nerešljiv**, v drugem, da je **enolično rešljiv** in v tretjem, da je **neenolično rešljiv**.

Če ima sistem m enačb in n neznank, potem pravimo, da je njegova **velikost** $m \times n$. Glede na velikost delimo sisteme na **kvadratne** (če $m = n$), **predoločene** (če $m > n$) in **poddoločene** (če $m < n$).

Pogosto (vendar ne vedno) se zgodi, da je predoločen sistem nerešljiv, kvadraten sistem enolično rešljiv in poddoločen sistem neenolično rešljiv.

Sisteme linearnih enačb rešujemo z Gaussovo metodo. Ideja je zelo preprosta. V našem sistemu velikosti $m \times n$ vzamemo prvo spremenljivko, ki v vsaj eni od enačb nastopa z neničelnim koeficientom (recimo x_{i_1}) in jo izrazimo z ostalimi spremenljivkami. Dobljeni izraz za x_{i_1} nato vstavimo v preostalih $m-1$ enačb in jih uredimo. Dobimo sistem velikosti $(m-1) \times (n-1)$. Sedaj isti postopek ponovimo na novem sistemu. Spet vzamemo prvo spremenljivko, ki v vsaj eni enačbi novega sistema nastopa z neničelnim koeficientom (recimo x_{i_2}) in jo izrazimo z ostalimi spremenljivkami. Dobljeni izraz za x_{i_2} vstavimo v preostalih $m-2$ enačb in jih uredimo. Dobimo sistem velikosti $(m-2) \times (n-2)$. Postopek ponavljamo, dokler ne zmanjka bodisi enačb bodisi spremenljivk, ki vsaj enkrat nastopajo z neničelnim koeficientom. Če nam je zmanjkalo enačb, potem je sistem rešljiv. Če pa nam je zmanjkalo spremenljivk z neničelnimi koeficienti, potem so nam na koncu ostale samo še enačbe oblike $0 = c$, kjer je c realno število. Če so vse oblike $0 = 0$, potem je sistem rešljiv, sicer pa je nerešljiv.

Povejmo še, kako v rešljivem primeru poiščemo rešitev. Recimo, da je x_{i_r} zadnja spremenljivka, ki smo jo izrazili. Njeno formulo vstavimo v formule za spremenljivke $x_{i_{r-1}}, \ldots, x_{i_1}$. Nato novo formulo za $x_{i_{r-1}}$ vstavimo v nove formule za spremenljivke $x_{i_{r-2}}, \ldots, x_{i_1}$. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do x_{i_1}. Končno rešitev $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ dobimo tako, da spremenljivke $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ zamenjamo z njihovimi formulami. Lahko jo zapišemo v obliki

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \sum_{j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}} x_j \mathbf{p_j},$$

kjer so $\mathbf{r}_0$ in $\mathbf{p}_j$ konstantni vektorji. Krajši premislek nas prepriča, da so vektorji $\mathbf{p}_j$ linearno neodvisni.

Primer. Rešimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x - y + 3u - 2v &= 1, \\ x + y + 2u - 2v &= 0, \\ x + 2u - 3v &= -2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo

$$x = \frac{1 + y - 3u + 2v}{2}.$$

Ko formulo za x vstavimo v drugo in tretjo enačbo, dobimo enačbi

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}u - v &= -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}u - 2v &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo

$$y = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u + v}{\frac{3}{2}} = \frac{-1 - u + 2v}{3}.$$

Ko to vstavimo v drugo enačbo in uredimo, dobimo

$$\frac{1}{3}u - \frac{5}{3}v = -\frac{7}{3}.$$

Odtod izrazimo

$$u = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{5}{3}v}{\frac{1}{3}} = -7 + 5v.$$

Sedaj nam je zmanjkalo enačb, torej je sistem rešljiv. Ko formulo za u vstavimo v formuli za y in x, dobimo

$$y = \frac{6 - 3v}{3} = 2 - v \quad \text{in} \quad x = \frac{22 + y - 13v}{2}.$$

Sedaj še formulo za y vstavimo v formulo za x in dobimo

$$x = \frac{24 - 14v}{2} = 12 - 7v.$$

Končna rešitev je

$$\mathbf{r} = (x, y, u, v) = (12-7v, 2-v, -7+5v, v) = (12, 2, -7, 0) + t(-7, -1, 5, 1).$$

Rešitev je torej premica v $\mathbb{R}^4$.

Primer. Rešimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} y - 2z &= 2, \\ -x - y + 2z &= 1, \\ x - 2y + 4z &= 1. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe izrazimo x:

$$x = -1 - y + 2z$$

in ga vstavimo v prvo in tretjo enačbo. Ker prva enačba ne vsebuje x, se ne spremeni. Imamo sistem

$$\begin{aligned} y - 2z &= 2, \\ -3y + 6z &= 2. \end{aligned}$$

Sedaj iz prve enačbe izrazimo y:

$$y = 2 + 2z$$

in ga vstavimo v drugo enačbo. Ko uredimo, dobimo

$$0 = 8.$$

Ker smo dobili protislovno enačbo, linearni sistem nima rešitve.

Če iz enačbe

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

izrazimo x_1 in ga vstavimo v enačbo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = d,$$

potem dobimo

$$(c_2 - \frac{c_1}{a_1}a_2)x_2 + \ldots + (c_n - \frac{c_1}{a_1}a_n)x_n = d - \frac{c_1}{a_1}b.$$

Enak rezultat bi dobili, če bi od druge enačbe odšteli z $-\frac{c_1}{a_1}$ pomnoženo prvo enačbo. Ta opazka nam lahko precej skrajša reševanje linearnega sistema.

1.6. Afine množice

Pravimo, da je podmnožica $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$ **afina**, če je enaka množici vseh rešitev kakega sistema linearnih enačb.

Definicijo afine množice lahko povemo tudi z geometrijskim besediščem. Pravimo, da je podmnožica $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$ **afina**, če je enaka bodisi $\mathbb{R}^n$ bodisi preseku končno mnogo hiperravnin v $\mathbb{R}^n$.

Glavni rezultat prejšnjega razdelka lahko povzamemo v naslednjo ugotovitev. Če je $\mathcal{A}$ afina množica v $\mathbb{R}^n$, potem je $\mathcal{A}$

- prazna množica ali
- enoelementna množica ali
- obstaja taka točka $\mathbf{r_0} \in \mathbb{R}^n$, tako naravno število l in taki linearno neodvisni vektorji $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_l \in \mathbb{R}^n$, da je

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_l\mathbf{p}_l : \ t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{R}\}.$$

Velja tudi obrat. Množica, ki je enega od teh treh tipov je afina. Prazna množica je množica rešitev linearne enačbe

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1.$$

Enoelementna množica $\{(c_1, \ldots, c_n)\}$ je množica rešitev sistema

$$x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n.$$

V primeru, ko je afina množica podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \ldots + t_l\mathbf{p}_l,$$

kjer so $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_l$ linearno neodvisni, ločimo dva primera. Če je $l = n$, potem je afina množica enaka $\mathbb{R}^n$, ki je množica rešitev linearne enačbe

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0.$$

Če je $l < n$, potem parametrično enačbo zapišemo po komponentah:

$$\begin{array}{ccccccc} p_{11}t_1 & + & \ldots & + & p_{l1}t_l & = & x_1 - c_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ p_{1n}t_1 & + & \ldots & + & p_{ln}t_l & = & x_n - c_n. \end{array}$$

Zanima nas, za katere vrednosti spremenljivk $x_1, \ldots, x_n$ je to rešljiv sistem linearnih enačb v spremenljivkah $t_1, \ldots, t_l$. Ko ta sistem obdelamo z Gaussovo metodo, dobimo na koncu enačbe oblike $0 = f_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = l + 1, \ldots, n$. To je iskani sistem linearnih enačb.

Primer. Poiščimo normalno enačbo ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki je podana parametrično z enačbo

$$\mathbf{r} = (1, 2, -1) + s(2, 1, 3) + t(-1, 1, 1).$$

Zapišimo enačbo po komponentah:

$$x = 1 + 2s - t, \quad y = 2 + s + t, \quad z = -1 + 3s + t,$$

kar preoblikujemo v sistem linearnih enačb v s in t:

$$2s - t = x - 1, \quad s + t = y - 2, \quad 3s + t = z + 1.$$

Iz prve enačbe izrazimo s in ga vstavimo v drugo in tretjo enačbo. Dobimo

$$\frac{3}{2}t = -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2} \quad \text{in} \quad \frac{5}{2}t = -\frac{3}{2}x + z + \frac{5}{2}.$$

Iz prve enačbe izrazimo t in ga vstavimo v drugo enačbo. Dobimo

$$0 = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y + z + 5.$$

To je iskana implicitna enačba ravnine.

Primer. Premico v $\mathbb{R}^3$, ki je podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = (1, 1, 2) + t(-1, 2, 2),$$

izrazimo kot presek dveh ravnin.

Enačbo premice zapišemo po komponentah in izrazimo t. Dobimo

$$t = \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{2}.$$

Za enačbi ravnin lahko vzamemo na primer $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2}$ in $\frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$. Ko ti enačbi uredimo, dobimo

$$2x + y = 1 \quad \text{in} \quad y - z = -1.$$

1.7. Pravokotna projekcija točke na afino množico

Podan je vektor $\mathbf{r}_1$ v $\mathbb{R}^n$ in afina množica $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^n$. Iščemo tako točko $\mathbf{r}_1'$ v $\mathcal{A}$, ki je najbližje točki $\mathbf{r}_1$. Točki $\mathbf{r}_1'$ pravimo **pravokotna projekcija** točke $\mathbf{r}_1$ na afino množico $\mathcal{A}$. Izkaže se, da taka točka vedno obstaja in da je ena sama. Ogledali si bomo dve metodi za določanje $\mathbf{r}_1'$.

Če je afina množica $\mathcal{A}$ podana s sistemom linearnih enačb

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m,
\end{array}
$$

potem pravokotno projekcijo točke $\mathbf{r}_1 = (c_1, \ldots, c_n)$ na $\mathcal{A}$ izračunamo po naslednjem receptu. Prvi korak: nastavek

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & = & c_1 + a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{m1}\lambda_m, \\
\vdots & & \\
x_n & = & c_n + a_{1n}\lambda_1 + \ldots + a_{mn}\lambda_m,
\end{array}
$$

vstavimo v gornji linearni sistem in uredimo. Dobimo sistem m linearnih enačb za $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Drugi korak: poiščemo eno rešitev tega $m \times m$ sistema. Izkaže se, da je ta sistem vedno rešljiv, a ne nujno enolično. Tretji korak: Izbrano rešitev sistema vstavimo v nastavek za $x_1, \ldots, x_n$. Dobimo koordinate iskane pravokotne projekcije. Rezultat je neodvisen od tega, katero rešitev $m \times m$ sistema vstavimo.

Primer. Poišči pravokotno projekcijo točke

$$\mathbf{r}_1 = (1, 1, -1, -1)$$

na afino množico, ki je podana implicitno s sistemom

$$
\begin{array}{rcl}
2x - y + 3u - 2v & = & 1, \\
x + y + 2u - 2v & = & 0, \\
x + 2u - 3v & = & -2.
\end{array}
$$

Projekcijo iščemo z nastavkom

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 1 + 2\lambda + \mu + \nu, \\
y & = & 1 - \lambda + \mu, \\
u & = & -1 + 3\lambda + 2\mu + 2\nu, \\
v & = & -1 - 2\lambda - 2\mu - 3\nu.
\end{array}
$$

ko ta nastavek vstavimo v linearen sistem in uredimo, dobimo

$$\begin{aligned} 18\lambda + 11\mu + 14\nu &= 1, \\ 11\lambda + 10\mu + 11\nu &= -2, \\ 14\lambda + 11\mu + 14\nu &= -4. \end{aligned}$$

Rešitev tega linearnega sistema je

$$\lambda = \frac{5}{4}, \quad \mu = \frac{16}{19}, \quad \nu = -\frac{167}{76}.$$

Od tod sledi, da je $\mathbf{r}_1' = (x, y, u, v)$, kjer je

$$x = \frac{163}{76}, \quad y = \frac{45}{76}, \quad u = \frac{3}{76}, \quad v = \frac{107}{76}.$$

Bralca vabim, da rezultat preveri s formulo za projekcijo točke na premico.

Dokažimo sedaj, da ta metoda res da pravilen rezultat.

Dokaz: Če pišemo $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbf{u}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ za $i = 1, \ldots, m$, potem lahko linearni sistem zapišemo kot

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_1 \rangle = b_1, \ldots, \langle \mathbf{r}, \mathbf{u}_m \rangle = b_m,$$

nastavek pa kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_1} + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m \mathbf{u}_m.$$

Ko vstavimo nastavek v sistem, dobimo sistem velikosti $m \times m$ za spremenljivke $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Naj bo $\lambda_1', \ldots, \lambda_m'$ rešitev tega sistema. Dokaz rešljivosti tega sistema bomo preskočili. Trdimo, da je

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r_1} + \lambda_1' \mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_m' \mathbf{u}_m$$

edina pravokotna projekcija točke $\mathbf{r}_1$ na množico $\mathcal{A}$. Dokazati moramo, da za poljubno točko $\mathbf{z} \in \mathcal{A}$, ki je različna od $\mathbf{r}_1'$, velja

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{z}\| > \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'\|.$$

Naj bo $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1'$ in $\mathbf{b} = \mathbf{r}_1' - \mathbf{z}$. Ker je $\mathbf{z} \neq \mathbf{r}_1'$, je $\mathbf{b} \neq 0$. Dokažimo najprej, da je $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Ker sta $\mathbf{r}_1'$ in $\mathbf{z}$ rešitvi sistema linearnih enačb, velja $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1' \rangle = b_i$ in $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{z} \rangle = b_i$ za vsak $i = 1, \ldots, m$. Torej je $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1' \rangle - \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{z} \rangle = b_i - b_i = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, m$. Ker je $\mathbf{a} = -\sum_{i=1}^m \lambda_i' \mathbf{u}_i$, odtod sledi, da res velja $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = -\sum_{i=1}^m \lambda_i' \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle = 0$. Iz $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ in $\mathbf{b} \neq 0$ sledi, da je $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 > \|\mathbf{a}\|^2$. Torej je res $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| > \|\mathbf{a}\|$. $\square$

Če je afina množica $\mathcal{A}$ podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1 \mathbf{p}_1 + \ldots + t_l \mathbf{p}_l,$$

kjer so $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_l$ (ne nujno linearno neodvisni) vektorji v $\mathbb{R}^n$, potem pravokotno projekcijo točke $\mathbf{r}_1$ na $\mathbf{A}$ izračunamo tako, da gornji nastavek za $\mathbf{r}$ vstavimo v enačbe

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1 \rangle = 0, \ldots, \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_m \rangle = 0.$$

Dobimo rešljiv sistem m enačb za spremenljivke $t_1, \ldots, t_m$. Če je $t_1', \ldots, t_m'$ rešitev tega $m \times m$ sistema, potem je iskana točka

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_0 + t_1' \mathbf{p}_1 + \ldots + t_l' \mathbf{p}_l.$$

Primer. Projecirajmo točko $\mathbf{r}_1 = (1, 3, 2)$ na ravnino, ki je podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{r} = (1, 2, -1) + s(2, 1, 3) + t(-1, 1, 1).$$

Izraz $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (0, -1, -3) + s(2, 1, 3) + t(-1, 1, 1)$, moramo vstaviti v enačbi

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, (2, 1, 3) \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_1, (-1, 1, 1) \rangle = 0.$$

Ko uredimo, dobimo sistem dveh enačb za s in t:

$$14s + 2t = -1 \quad \text{in} \quad 2s + 3t = 0.$$

Odtod sledi, da je $s = -\frac{3}{38}$ in $t = \frac{1}{19}$. Torej je

$$\mathbf{r_1}' = (1, 2, -1) - \frac{3}{38}(2, 1, 3) + \frac{1}{19}(-1, 1, 1) = (\frac{15}{19}, \frac{75}{38}, -\frac{45}{38}).$$

Dokaz, da metoda vedno deluje, je zelo podoben kot pri prejšnji metodi.

Dokaz: Naj bo

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_0 + t_1' \mathbf{p}_1 + \ldots + t_l' \mathbf{p}_l$$

taka točka, ki zadošča enačbam

$$\langle \mathbf{r_1}' - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1 \rangle = 0, \ldots, \langle \mathbf{r_1}' - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_m \rangle = 0.$$

(Dokaz obstoja take točke spet preskočimo.) Trdimo, da potem za vsako točko

$$\mathbf{z} = \mathbf{r}_0 + t_1 \mathbf{p}_1 + \ldots + t_l \mathbf{p}_l,$$

ki se razlikuje od $\mathbf{r}_1'$, velja

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{r}_1\| > \|\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1\|.$$

Naj bo spet $\mathbf{a} = \mathbf{z} - \mathbf{r}_1' \neq 0$ in $\mathbf{b} = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1$. Ker je $\langle \mathbf{r_1}' - \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_i \rangle = 0$ za $i = 1, \ldots, m$, velja $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \sum_{i=1}^m (t_i - t_i') \mathbf{p_i}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^m (t_i - t_i') \langle \mathbf{p_i}, \mathbf{b} \rangle = 0$, Sledi, da je $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 > \|\mathbf{b}\|^2$. Torej je res $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| > \|\mathbf{b}\|$. $\square$

1.8. Regresijska premica in posplošitve

Iščemo tako premico $y = ax+b$, ki se najbolje prilega danim točkam

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

Za vsak i naj bo d_i razdalja med dano točko (x_i, y_i) in točko (x_i, ax_i+b) na premici. Velja torej $d_i = |y_i - (ax_i + b)|$. Kot mero za natančnost prileganja vzamemo izraz $d_1^2+\ldots+d_n^2$. Koeficienta a in b želimo določiti tako, da bo ta izraz najmanjši možen. Potem pravimo, da je $y = ax+b$ premica, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega točkam $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

Pišimo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Potem je

$$d_1^2 + \ldots + d_n^2 = \|\mathbf{y} - (a\mathbf{x} + b\mathbf{1})\|^2.$$

Ta izraz je najmanjši pri tistih a in b, ko je točka $a\mathbf{x}+b\mathbf{1}$ najbližje točki $\mathbf{y}$. V prejšnjem razdelku smo se naučili, da se to zgodi v primeru, ko je $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{1} - \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = 0$ in $\langle a\mathbf{x} + b\mathbf{1} - \mathbf{y}, \mathbf{1}\rangle = 0$. Rešiti torej moramo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} a\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + b\langle \mathbf{1}, \mathbf{x}\rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle, \\ a\langle \mathbf{x}, \mathbf{1}\rangle + b\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle &= \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}\rangle. \end{aligned}$$

Delimo sistem z n in uvedimo naslednje oznake

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Potem se sistem enačb za a in b glasi

$$\begin{array}{ccccc} a\overline{x^2} & + & b\overline{x} & = & \overline{xy}, \\ a\overline{x} & + & b & = & \overline{y}. \end{array}$$

Rešitev tega sistema je

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{in} \quad b = \frac{\overline{x^2}\,\bar{y} - \overline{xy}\,\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Primer. Poiščimo premico, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega točkam

$$(1, 1), \quad (2, -1), \quad (3, 0), \quad (4, -1).$$

Najprej izračunamo

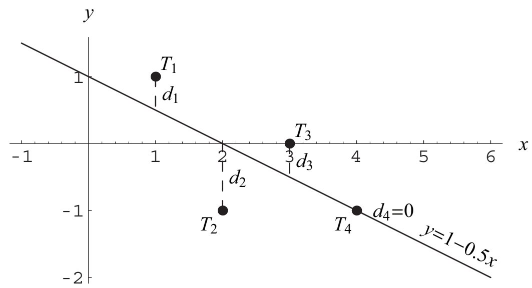
$$\bar{x} = 2.5, \quad \bar{y} = -0.25, \quad \overline{x^2} = 7.5, \quad \overline{xy} = -1.25.$$

Potem je

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = -0.5, \quad b = \frac{\overline{x^2}\,\bar{y} - \overline{xy}\,\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = 1,$$

torej je iskana premica

$$y = 1 - 0.5x.$$



Metodo najmanjših kvadratov lahko posplošimo na polinome višjih stopenj in tudi na več spremenljivk. Ponazorimo to z dvema primeroma.

Najprej poiščimo kvadratno parabolo $y = ax^2 + bx + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ po metodi najmanjših kvadratov. V tem primeru je $d_i = |y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)|$ in

$$d_1^2 + \ldots + d_n^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{r}\|^2,$$

kjer je

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \quad \mathbf{r} = a(x_1^2, \ldots, x_n^2) + b(x_1, \ldots, x_n) + c(1, \ldots, 1).$$

Iz prejšnjega razdelka vemo, da bo ta izraz najmanjši, ko bo vektor $\mathbf{y} - \mathbf{r}$ pravokoten na vektorje $(x_1^2, \ldots, x_n^2)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ in $(1, \ldots, 1)$. Rešiti torej moramo sistem enačb

$$\begin{aligned}
a\sum x_i^4 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 &= \sum x_i^2 y_i,\\
a\sum x_i^3 + b\sum x_i^2 + c\sum x_i &= \sum x_i y_i,\\
a\sum x_i^2 + b\sum x_i + c\sum 1 &= \sum y_i,
\end{aligned}$$

kjer pri vseh vsotah i teče od 1 do n.

Poiščimo po metodi najmanjših kvadratov še ravnino $z = ax + by + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$. Velja $d_i = |z_i - (ax_i + by_i + c)|$ in

$$d_1^2 + \ldots + d_n^2 = \|\mathbf{z} - a\mathbf{x} - b\mathbf{y} - c\mathbf{1}\|^2,$$

kjer je $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$. Ta izraz bo najmanjši, ko bo vektor $\mathbf{z} - a\mathbf{x} - b\mathbf{y} - c\mathbf{1}$

pravokoten na vektorje $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in $\mathbf{1}$. Rešiti moramo sistem

$$\begin{aligned} a\sum x_i^2 + b\sum x_iy_i + c\sum x_i &= \sum x_iz_i,\\ a\sum x_iy_i + b\sum y_i^2 + c\sum y_i &= \sum y_iz_i,\\ a\sum x_i + b\sum y_i + c\sum 1 &= \sum z_i, \end{aligned}$$

kjer pri vseh vsotah i teče od 1 do n.

1.9. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Geometrijski in algebrski vektorji)
   (a) Kaj je geometrijski vektor? Kaj je algebrski vektor?
   (b) Kdaj sta dva geometrijska vektorja enaka? Kaj pa dva algebrska?
   (c) Kako geometrijskemu vektorju priredimo ustrezen algebrski vektor?
   (d) Pojasni zvezo med algebrskimi vektorji in točkami?

(2) (Linearne kombinacije) Dani so vektorji $\mathbf{a} = (-1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$ in $\mathbf{c} = (1, -2)$.
   (a) Določi točko, ki deli daljico med točkama $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ v razmerju $1 : 2$!
   (b) Določi središče točk $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$!
   (c) Dokaži, da sta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$ linearno neodvisna!
   (d) Dokaži, da so vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ linearno odvisni!

(3) (Norma, skalarni in vektorski produkt)
   (a) Kako je definirana norma vektorja? Kdaj je enaka 0?
   (b) Kako je definiran skalarni produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?
   (c) Kako je definiran vektorski produkt dveh vektorjev? Kdaj je enak 0?

(4) (Premice v $\mathbb{R}^n$)
   (a) Premica je podana z dvema točkama $\mathbf{r}_1$ in $\mathbf{r}_2$. Določi parametrično in normalno enačbo te premice!
   (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te premice!
   (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to premico!

(5) (Ravnine v $\mathbb{R}^3$)
   (a) Določi parametrično in normalno enačbo ravnine, ki gre skozi točke $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ in $\mathbf{r}_3$!
   (b) Pojasni, kako izračunamo oddaljenost točke T od te ravnine!
   (c) Pojasni, kako določimo projekcijo točke T na to ravnino!

(6) (Sistemi linearnih enačb)
   (a) Kako poiščemo rešitev sistema linearnih enačb z metodo zaporednega izločanja spremenljivk?
   (b) Kako poiščemo rešitev sistema linearnih enačb z Gaussovo eliminacijo?
   (c) Pojasni zvezo med obema metodama!
(7) (Afine množice v $\mathbb{R}^n$)
   (a) Kaj je afina množica? Povej definicijo in nekaj primerov!
   (b) Kako izračunamo projekcijo točke na afino množico, ki je podana implicitno?
   (c) Kako izračunamo projekcijo točke na afino množico, ki je podana parametrično?
(8) (Regresijska premica) Iščemo premico, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.
   (a) Kateri izraz meri ujemanje premice z danimi točkami?
   (b) Kako poiščemo najmanjšo vrednost izraza iz (a)?
   (c) Izpelji formuli za koeficienta iskane premice!
(9) (Posplošitve regresijske premice)
   (a) Kako poiščemo kvadratno parabolo $y = ax^2 + bx + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$?
   (b) Kako poiščemo ravnino $z = ax + by + c$, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$?
   (c) Kolikšno je najmanjše število točk, pri katerem sta problema iz (a) in (b) smiselna?

POGLAVJE 2

Matrike in determinante

2.1. Operacije z matrikami

Matrika velikosti $m \times n$ je urejena m-terica urejenih n-teric realnih števil, torej element prostora $(\mathbb{R}^n)^m$. V primeru, ko je $m = 1$ ali $n = 1$ lahko $m \times n$ matriko smatramo za vektor, v primeru $m = n = 1$ pa jo lahko smatramo za skalar. Matrike običajno označujemo z velikimi tiskanimi črkami. Namesto

$$A = ((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn}))$$

pišemo raje

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vektorju

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix}$$

pravimo i-ta **vrstica** matrike A, vektorju

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

pa j-ti **stolpec** matrike A. Skalar

$$a_{ij}$$

je (i, j)-ti **element** matrike A.

Z matrikami lahko računamo. Osnovne računske operacije so seštevanje matrik, množenje matrike s skalarjem, množenje matrik in transponiranje. Pri vsaki od naštetih operacij si bomo ogledali definicijo in nekaj osnovnih lastnosti.

Vsota dveh matrik

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

je matrika

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Če matriki A in B nista iste velikosti, potem njune vsote ne moremo definirati.

Definirajmo sedaj **produkt matrike s skalarjem**. Če je λ skalar in A kot zgoraj, potem je

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Namesto $(-1)\cdot A$ pišemo kar $-A$.

Naj bo O matrika iz samih ničel velikosti $m\times n$. Potem za poljubne matrike A, B, C velikosti $m \times n$ in poljubna skalarja λ, μ velja

(1) $A+B=B+A$,
(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$,
(3) $A+O=O+A=A$,
(4) $A+(-A)=(-A)+A=O$,
(5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,
(6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$,
(7) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$,
(8) $1\cdot A=A$.

Najzanimivejša operacija je **množenje dveh matrik**. Povejmo definicijo najprej za poseben primer. Če je

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

potem je

$$AB=a_1b_1+\ldots+a_nb_n=\sum_{k=1}^{n} a_kb_k.$$

V splošnem (i,j)-ti element produkta AB dobimo tako, da na gornji način zmnožimo i-to vrstico matrike A z j-tim stolpcem matrike B. Zapišimo to še na dolgo. Če je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix},$$

potem je

$$AB=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da je produkt definiran samo v primeru, ko je število stolpcev matrike A enako številu vrstic matrike B. Opazimo tudi, da ima produkt AB toliko vrstic kot matrika A in toliko stolpcev kot matrika B.

Primer. Zmnožimo matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Velja

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ta primer nas nauči, da ni vseeno, v kakšnem vrstnem redu zmnožimo dve matriki.

Primer. Tovarna proizvaja izdelke I_1, I_2 in I_3. Pri tem se uporabljajo surovine S_1, S_2, S_3 in S_4. Količina surovin potrebnih za posamezen izdelek je podana s tabelo A:

A	I_1	I_2	I_3
S_1	2	0	1
S_2	1	3	3
S_3	0	2	1
S_4	4	1	0

Planirana proizvodnja izdelkov I_1, I_2 in I_3 v mesecih M_1 in M_2 je podana s tabelo B:

B	M_1	M_2
I_1	400	300
I_2	200	150
I_3	100	250

Koliko surovin moramo kupiti posamezen mesec, da bomo izpolnili plan? Odgovor je podan s tabelo C:

C	M_1	M_2
S_1	$2 \cdot 400 + 0 \cdot 200 + 1 \cdot 100 = 900$	$2 \cdot 300 + 0 \cdot 150 + 1 \cdot 250 = 850$
S_2	$1 \cdot 400 + 3 \cdot 200 + 3 \cdot 100 = 1300$	$1 \cdot 300 + 3 \cdot 150 + 3 \cdot 250 = 1500$
S_3	$0 \cdot 400 + 2 \cdot 200 + 1 \cdot 100 = 500$	$0 \cdot 300 + 2 \cdot 150 + 1 \cdot 250 = 550$
S_4	$4 \cdot 400 + 1 \cdot 200 + 0 \cdot 100 = 1800$	$4 \cdot 300 + 1 \cdot 150 + 0 \cdot 250 = 1350$

Transponiranka matrike A velikosti $m \times n$ je matrika A^T velikosti $n \times m$, ki ima na (i,j)-tem mestu element a_{ji}. Zapišimo na dolgo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Osnovne lastnosti množenja matrik in transponiranja so

(9) $(AB)C = A(BC)$, (13) $(A^T)^T = A$,
(10) $(A+B)C = AC + BC$, (14) $(AB)^T = B^T A^T$,
(11) $A(B+C) = AB + AC$, (15) $(A+B)^T = A^T + B^T$,
(12) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$, (16) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Pri vsaki formuli predpostavljamo, da so matrike take velikosti, da so vsa seštevanja in množenja definirana.

Naj bo I_k kvadratna matrika velikosti $k \times k$ naslednje oblike

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Taki matriki pravimo **identična matrika**. Za poljubno matriko A velikosti $m \times n$ in poljubno naravno število k velja

(17) $I_m A = A I_n = A$ in (18) $I_k^T = I_k$.

2.2. Matrični zapis linearnega sistema

Sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

lahko s pomočjo matričnega množenja zapišemo v obliki

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Spomnimo se, da sistem rešujemo z uporabo naslednjih treh tipov **elementarnih transformacij**:

(1) k eni od enačb lahko prištejemo večkratnik druge enačbe;
(2) lahko zamenjamo vrstni red dveh enačb;

(3) enačbo lahko pomnožimo z neničelno konstanto.

Transformacija prvega tipa nastopa, recimo, v primeru, ko iz druge enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo vstavimo v prvo. Poskusimo te transformacije zapisati z matrikami.

Definirajmo **elementarne matrike** $E_{ij}(\alpha)$, P_{ij} in $E_i(\beta)$ takole:

(1) matriko $E_{ij}(\alpha)$ dobimo tako, da v identični matriki I_m k i-ti vrstici prištejemo α-kratnik j-te vrstice;
(2) matriko P_{ij} dobimo tako, da v I_m zamenjamo i-to in j-to vrstico;
(3) matriko $E_i(\beta)$ dobimo tako, da v I_m množimo i-to vrstico z β.

Krajši račun pokaže, da lahko elementarne transformacije opišemo s pomočjo elementarnih matrik takole:

(1) če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ k i-ti enačbi prištejemo α-kratnik j-te enačbe, potem dobimo sistem $E_{ij}(\alpha)A\mathbf{x} = E_{ij}(\alpha)\mathbf{b}$;
(2) če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zamenjamo i-to in j-to enačbo, potem dobimo sistem $P_{ij}A\mathbf{x} = P_{ij}\mathbf{b}$;
(3) če v sistemu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pomnožimo i-to enačbo z β, potem dobimo sistem $E_i(\beta)A\mathbf{x} = E_i(\beta)\mathbf{b}$.

Gaussovo metodo lahko povemo takole: sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ toliko časa množimo z elementarnimi matrikami z leve, dokler ne dobimo sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$, pri katerem je A' **stopničaste oblike**. To pomeni, da je za vsak $i = 1, \ldots, m$ na začetku $i + 1$-te vrstice v A' vsaj ena ničla več, kot na začetku i-te vrstice. Tak sistem znamo potem rešiti.

Primer. Matrika

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je stopničaste oblike.

Tudi splošno rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + p_{11}t_1 + \ldots + p_{r1}t_r, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n0} + p_{1n}t_1 + \ldots + p_{rn}t_r \end{aligned}$$

lahko zapišemo v matrični obliki s parametrično enačbo.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + P\mathbf{t},$$

kjer je $\mathbf{x}$ kot zgoraj in

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & \dots & p_{rn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si še, kako z matrikami zapišemo formuli za projekcijo točke na afino množico. Če je afina množica $\mathcal{A}$ podana z linearnim sistemom

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

potem projekcijo točke $\mathbf{x}_1$ na $\mathcal{A}$ iščemo z nastavkom

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + A^T\mathbf{c},$$

kjer je $\mathbf{c}$ neznani vektor. Ko to vstavimo v sistem, dobimo

$$AA^T\mathbf{c} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_1.$$

Če je $\mathbf{c}'$ rešitev tega sistema, potem je iskana projekcija

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_1 + A^T\mathbf{c}'.$$

Če pa je afina množica $\mathcal{A}$ podana s parametrično enačbo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + P\mathbf{t},$$

potem projekcijo točke $\mathbf{x}_1$ na $\mathcal{A}$ poiščemo tako, da gornji nastavek vstavimo v enačbo $P^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0$. Dobimo

$$P^TP\mathbf{t} = P^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0).$$

Če je $\mathbf{t}'$ rešitev tega sistema, potem je iskana projekcija

$$\mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_0 + P\mathbf{t}'.$$

2.3. Determinante

Vsaki kvadratni matriki A bomo priredili realno število $\det A$, ki mu pravimo **determinanta** matrike A. Povedali bomo, kako izračunamo determinante matrik velikosti 1×1 in kako se determinante matrik velikosti $n \times n$ izražajo z determinantami matrik velikosti $(n-1) \times (n-1)$. Potem bomo znali izračunati determinanto matrik poljubne velikosti.

Najprej definirajmo determinanto za matrike velikosti 1×1.

$$\det [a] = a.$$

Za vsako matriko A velikosti $n \times n$ in za vsak $i, j = 1, \dots, n$ označimo z A_{ij} matriko velikosti $(n-1) \times (n-1)$, ki jo dobimo tako, da v matriki A zbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec. Definirajmo

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^n a_{1n} \det A_{1n}.$$

Na kratko to zapišemo s formulo $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{1+i}a_{1i}\det A_{1i}$.

Primer. Izpeljimo formulo za determinante matrik velikosti 2×2. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

potem je $A_{11} = [a_{22}]$ in $A_{12} = [a_{21}]$. Po definiciji determinant matrik velikosti 1×1 je $\det A_{11} = a_{22}$ in $\det A_{12} = a_{21}$. Zato velja

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Primer. Izpeljimo še formulo za determinante matrik velikosti 3×3. Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

potem je

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Po formuli iz prejšnjega primera je $\det A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $\det A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$ in $\det A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$. Zato velja

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Formula za determinanto matrike velikosti 4×4 bi vsebovala $4! = 24$ členov, za 5×5 pa $5! = 120$ členov. To je preveč za praktično uporabo. Zato si bomo kasneje ogledali bolj praktično metodo za računanje determinant.

Povejmo, kaj je geometrijski pomen determinante $\det A$. Če je A velikosti 2×2, potem je $|\det A|$ ravno ploščina paralelograma, ki ga določata stolpca matrike A. Če pa je A velikosti 3×3, potem je $|\det A|$ volumen parelelepipeda, ki ga določajo stolpci matrike A. Tudi predznak $\det A$ ima geometrijski pomen, ki je povezan z orientacijo.

Brez dokaza povejmo naslednji formuli.

Trditev. Če je A matrika velikosti $n \times n$, potem za poljubna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ veljata naslednji formuli:

- **formula za razvoj $\det A$ po i-ti vrstici**
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det A_{ik};$$
- **formula za razvoj $\det A$ po j-tem stolpcu**
$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

Formula za razvoj po prvi vrstici se ujema z definicijo determinante. Ponavadi razvijemo determinanto po tisti vrstici ali stolpcu, ki vsebuje največ ničel, saj to najbolj skrajša računanje.

Primer. Izračunajmo determinanto matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

z razvojem po prvem stolpcu. Velja

$$\det A = 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 2 - 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) = 2.$$

2.4. Lastnosti determinant

V prejšnjem razdelku smo spoznali, da so formule za računanje determinant, ki jih dobimo s pomočjo definicije, običajno predolge za praktično računanje. V tem razdelku bomo spoznali bolj učinkovito metodo, ki je podobna Gaussovi metodi za reševanje linearnih sistemov. Ideja Gaussove metode je, da matriko z elementarnimi transformacijami po vrsticah prevedemo na gornje trikotno matriko.

Najprej si oglejmo, kako izračunamo determinanto gornje trikotne matrike. Z n-kratno uporabo formule za razvoj po prvem stolpcu lahko dokažemo formulo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Oglejmo si še, kako na vrednost determinante vplivajo elementarne transformacije po vrsticah.

Trditve.
(1) Če v matriki $\boldsymbol{A}$ k eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice, potem se njena determinanta ne spremeni.
(2) Če v matriki $\boldsymbol{A}$ zamenjamo dve vrstici, potem se njeni determinanti spremeni predznak.
(3) Če v matriki $\boldsymbol{A}$ eno vrstico pomnožimo z $\boldsymbol{\beta}$, potem se tudi njena determinanta pomnoži z $\boldsymbol{\beta}$.
Podobne trditve veljajo tudi za stolpce.

S formulami gornjo trditev zapišemo takole

$$\det(E_{ij}(\alpha)A) = \det A, \ \det(P_{ij}A) = -\det A \text{ in } \det(E_i(\beta)A) = \beta \det A.$$

Dokaz: Dokazujemo z indukcijo po dimenziji matrike. Tretja trditev očitno velja za 1×1 matrike. Predpostavimo, da velja za $(n-1) \times (n-1)$ matrike, kjer $n \geq 2$. Vzemimo poljubno $n \times n$ matriko A in poljuben $i = 1, \ldots, n$. Za poljuben $j \neq i$ lahko $\det E_i(\beta)A$ izračunamo tako, da jo razvijemo po j-ti vrstici, potem uporabimo na vsakem členu indukcijsko predpostavko, izpostavimo β in upoštevamo formulo za razvoj $\det A$ po j-ti vrstici. Dobimo ravno $\beta \det A$.

Druga trditev velja za 2×2 matrike, ker je

$$\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Predpostavimo, da trditev velja za $(n-1) \times (n-1)$ matrike, kjer je $n \geq 3$. Vzemimo poljubno $n \times n$ matriko A in poljubna i in j, ki sta različna. Potem za poljuben k, ki je različen od i in j, lahko $\det P_{ij}A$ izračunamo tako, da jo razvijemo po k-ti vrstici, upoštevamo indukcijo predpostavko, izpostavimo -1 in upoštevamo formulo za razvoj $\det A$ po k-ti vrstici. Dobimo ravno $-\det A$.

Dokaz prve trditve je zelo podoben dokazu druge. Najprej pokažemo, da trditev velja za 2×2 matrike. Nato s podobnim računom kot pri drugi trditvi dokažemo, da iz primera $n \times n$, kjer $n \geq 3$, sledi primer $n \times n$. $\square$

Oglejmo si sedaj uporabo Gaussove metode na primeru.

Primer. S pomočjo Gaussove metode izračunaj determinanto matrike

$$\det A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

S transformacijama $E_{21}(-2)$ in $E_{31}(1)$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

S transformacijama $E_{32}(\frac{3}{4})$ in $E_{42}(\frac{1}{2})$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

S transformacijo $E_{43}(-\frac{6}{5})$ dobimo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}.$$

Formula za determinanto gornje trikotne matrike nam da

$$\det A = 1 \cdot (-4) \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{5} = -9.$$

Zanimiva posledica gornjih lastnosti determinante je naslednja trditev.

Trditev. Če ima matrika dve vrstici enaki, potem je njena determinanta enaka nič. Podobno velja za stolpce.

Dokaz: Če sta i-ta in j-ta vrstica matrike A enaki, potem je $P_{ij}A = A$. Od tod sledi $\det P_{ij}A = \det A$. Toda zgoraj smo dokazali, da je $\det P_{ij}A = -\det A$. Od tod sledi $\det A = -\det A$, torej je res $\det A = 0$. □

Izpeljimo sedaj formulo za determinanto produkta.

Trditev. Za poljubni kvadratni matriki A in B velja $\det AB = \det A \det B$.

Dokaz: Če v formule

$$\det(E_{ij}(\alpha)B) = \det B, \quad \det(P_{ij}B) = -\det B \quad \text{in} \quad \det(E_i(\beta)B) = \beta \det B$$

vstavimo namesto A identično matriko, dobimo

$$\det(E_{ij}(\alpha)) = 1, \quad \det(P_{ij}) = -1, \quad \det(E_i(\beta)) = \beta.$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned} \det(E_{ij}(\alpha)B) &= \det E_{ij}(\alpha)\det B,\\ \det(P_{ij}B) &= \det P_{ij}\det B,\\ \det(E_i(\beta)B) &= \det E_i(\beta)\det B. \end{aligned}$$

Torej velja $\det AB = \det A \det B$ v primeru, ko je A elementarna matrika. Formula velja tudi v primeru, ko ima matrika A v eni vrstici same ničle, saj ima potem tudi matrika AB v isti vrstici same ničle, torej je $\det A = \det AB = 0$, kar vidimo iz razvoja po tej vrstici.

Lotimo se sedaj splošnega primera. Vemo že, da obstajajo take elementarne matrike $E_1, \ldots, E_n$, da ima matrika $S = E_n \cdots E_1 A$ stopničasto obliko. Ločimo dva primera. Če ima matrika S ničelno vrstico, potem velja

$$\begin{aligned} \det E_n \cdots \det E_1 \det AB &= \det(E_n \cdots E_1 A)B = \det SB = 0,\\ \det E_n \cdots \det E_1 \det A &= \det E_n \cdots E_1 A = \det S = 0. \end{aligned}$$

Po krajšanju dobimo $\det A = \det AB = 0$, odkoder sledi $\det AB = \det A \det B$. Če pa matrika S nima ničelne vrstice, potem so vsi njeni diagonalni elementi neničelni. Zato lahko poiščemo take elementarne matrike $E_{n+1}, \ldots, E_m$, da je matrika $E_m \cdots E_{n+1} S$ identična. Odtod sledi, da je

$$\begin{aligned} \det E_m \cdots \det E_1 \det AB &= \det(E_m \cdots E_n A)B = \det IB = \det B,\\ \det E_m \cdots \det E_1 \det A &= \det E_n \cdots E_1 A = \det I. \end{aligned}$$

Drugo formulo pomnožimo z $\det B$ in primerjamo leve strani obeh formul. Po krajšanju spet dobimo $\det AB = \det A \det B$. □

2.5. Cramerovo pravilo

Če je kvadratni sistem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1,\\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

enolično rešljiv, lahko njegovo rešitev poiščemo s pomočjo determinant. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ namreč velja

$$x_i = \frac{\det C_i}{\det A},$$

kjer je A matrika sistema, se pravi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

in C_i matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo i-ti stolpec z vektorjem

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Tej formuli pravimo **Cramerovo pravilo**.

Primer. Rešimo naslednji sistem s Cramerovim pravilom:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1, \\ x + 3y &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev se glasi

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = \frac{\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{-5}{5} = -1,$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Primer. S pomočjo Cramerovega pravila rešimo sistem

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x - y &= 1 \\ 3y + z &= -1. \end{aligned}$$

Ker je

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 9,$$

je rešitev sistema

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{2}{9},$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{-5}{9},$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Za konec dodajmo še dokaz, da ima v primeru $\det A \neq 0$ sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eno samo rešitev in da to rešitev res dobimo s Cramerovim pravilom.

Dokaz: Recimo, da bi radi iz linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ izrazili spremenljivko x_j. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ pomnožimo i-to enačbo sistema z $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ in te enačbe seštejmo. Dobimo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\right) x_1 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\right) x_i + \ldots +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}(-1)^{i+j} \det A_{ij}\right) x_n = \sum_{j=i}^{n} b_i(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Naj bo C_j matrika, ki jo dobimo tako, da j-ti stolpec matrike A zamenjamo z vektorjem $\mathbf{b}$. Če determinanto matrike C_j razvijemo po j-tem stolpcu, dobimo

$$\det C_j = \sum_{j=i}^{n} b_i(-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

kar je ravno desna stran gornje enačbe. Obdelajmo še levo stran. Za vsak $k = 1, \ldots, n$ označimo z B_j^k matriko, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo j-ti stolpec s k-tim. Če razvijemo determinanto matrike B_j^k po k-ti vrstici, dobimo

$$\det B_j^k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Torej gornjo enačbo lahko zapišemo v obliki

$$(\det B_j^1)x_1 + \ldots + (\det B_j^j)x_j + \ldots + (\det B_j^n)x_n = C_j.$$

Opazimo, da je $B_j^j = A$, zato je $\det B_j^j = \det A$. V primeru, ko je $k \neq j$, pa ima matrika B_j^k dva stolpca enaka, zato je njena determinanta enaka nič. Torej se gornja enačba glasi

$$(\det A)x_j = \det C_j.$$

Če je $\det A \neq 0$, lahko odtod na en sam način izračunamo x_j. $\square$

2.6. Inverz matrike

Inverz kvadratne matrike A je taka kvadratna matrika B, da velja $AB = BA = I$. Matrika ima lahko kvečjemu en inverz. Če sta namreč B_1 in B_2 dva inverza matrike A, potem velja $B_1 = IB_1 = (B_2A)B_1 = B_2(AB_1) = B_2I = B_2$. Če matrika A ima inverz, ga označimo z A^{-1}. Ničelna matrika seveda nima inverza. Zanimivo pa je, da inverza nimajo tudi nekatere neničelne matrike.

Primer. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nima inverza. Za vsako matriko B ima namreč matrika AB ničlo v spodnjem desnem kotu in zato ne more biti enaka matriki I.

Primer. Elementarne matrike imajo inverze. Velja namreč

$$E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha), \quad P_{ij}^{-1} = P_{ij} \quad \text{in} \quad E_i(\beta)^{-1} = E_i(\frac{1}{\beta}).$$

Primer. Če imajo matrike $A_1, \ldots, A_n$ inverze, potem ima inverz tudi njihov produkt. Velja namreč

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Inverze matrik lahko uporabimo pri reševanju linearnih sistemov. Če je $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kvadraten sistem in če je matrika A obrnljiva, potem je $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ edina rešitev tega sistema.

Spoznali bomo dve metodi za računanje inverza. Prva metoda temelji na Gaussovi eliminaciji.

Prva metoda za računanje inverza. Matriko A razširimo na desno z identično matriko iste velikosti. Dobimo matriko $[A|I]$. To matriko obdelujemo z elementarnimi transformacijami po vrsticah toliko časa, dokler levo od črte ne dobimo bodisi matrike z ničelno vrstico bodisi identične matrike. V prvem primeru matrika A nima inverza, v drugem primeru, pa je inverz tisto, kar stoji desno od črte.

Primer. Izračunajmo inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Razširjena matrika je

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Če k drugi vrstici prištejemo z -3 pomnoženo prvo vrstico, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Če drugo vrstico delimo s -2, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Če k prvi vrstici prištejemo z -2 pomnožemo drugo vrstico, dobimo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Torej je

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Dokažimo sedaj, da ta metoda vedno deluje.

Dokaz: Naj bodo $E_1, \ldots, E_n$ take elementarne matrike, da ima matrika $S = E_n \cdots E_1 A$ stopničasto obliko. Ločimo dva primera. Če ima matrika S ničelno vrstico, potem ni obrnljiva, saj ima potem tudi matrika ST ničelno vrstico za vsak T (glej prvi primer). Odtod sledi, da tudi matrika A ni obrnljiva (uporabi drugi in tretji primer). Če pa matrika S nima ničelne vrstice, potem so vsi njeni diagonalni elementi neničelni. Zato lahko poiščemo take elementarne matrike $E_{n+1}, \ldots, E_m$, da je matrika $E_m \cdots E_{n+1} S$ identična. Odtod sledi, da je matrika A obrnljiva (uporabi drugi in tretji primer) in velja $A^{-1} = E_m \cdots E_{n+1} E_n \cdots E_1$. To pa je ravno tisto kar dobimo desno od črte, saj velja $[A|I] \stackrel{E_1}{\to} [E_1 A|E_1] \stackrel{E_2}{\to} \ldots \stackrel{E_m}{\to} [E_m \cdots E_1 A, E_m \cdots E_1] = [I|A^{-1}]$. $\square$

Spotoma smo dokazali, da ima matrika A inverz natanko tedaj, ko je enaka produktu elementarnih matrik. Druga metoda za računanje inverza temelji na Cramerovem pravilu.

Druga metoda za računanje inverza. Matrika A ima inverz natanko tedaj, ko je $\det A \neq 0$. Velja

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}^T,$$

kjer je $\tilde{A}$ matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da za vsak $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zamenjamo element a_{ij} z $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$. Spomnimo se, da matriko A_{ij} dobimo tako, da v matriki A prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec.

Na dolgo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \det A_{11} & -\det A_{12} & \ldots & (-1)^{1+n} \det A_{1n} \\ -\det A_{21} & \det A_{22} & \ldots & (-1)^{2+n} \det A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{n1} & (-1)^{n+2} \det A_{n2} & \ldots & \det A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Če matrika A ima inverz, potem velja $\det A \det A^{-1} = \det AA^{-1} = \det I = 1$, torej je $\det A \neq 0$. Privzemimo sedaj, da je $\det A \neq 0$ in pokažimo, da je $\frac{1}{\det A}\tilde{A}^T$ res inverz matrike A. Velja

$$\tilde{A}^T A = \begin{bmatrix} \det B_1^1 & \det B_1^2 & \ldots & \det B_1^n \\ \det B_2^1 & \det B_2^2 & \ldots & \det B_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det B_n^1 & \det B_n^2 & \ldots & \det B_n^n \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I,$$

kjer je B_j^k matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da j-ti stolpec zamenjamo s k-tim. Pri zadnjem koraku smo upoštevali, da je

$$\det B_j^k = \begin{cases} \det A, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Podobno je

$$A\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} \det C_1^1 & \det C_2^1 & \ldots & \det C_n^1 \\ \det C_1^2 & \det C_2^2 & \ldots & \det C_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \det C_1^n & \det C_2^n & \ldots & \det C_n^n \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I,$$

kjer je C_j^k matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da j-to vrstico zamenjamo s k-to. Pri zadnjem koraku smo upoštevali, da je $\det C_j^k = 0$, če $j \neq k$ in $\det A$ sicer. $\square$

Dokažimo še naslednjo trditev.

Trditev. Kvadratna matrika ima inverz natanko tedaj, ko so njene vrstice linearno neodvisne. Podobno velja za stolpce.

Dokaz: Naj bo A kvadratna $n \times n$ matrika. Označimo z $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ i-to vrstico matrike A. Če so vektorji $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linearno odvisni, potem je eden od njih enak linearni kombinaciji drugih, recimo $\mathbf{a}_j = \sum_{i \neq j} c_i \mathbf{a}_i$. Determinanta matrike A se ne spremeni, če za vsak i, ki ni enak j, prištejemo k j-ti vrstici z $-c_i$ pomnoženo i-to vrstico. Toda na ta način dobimo matriko z ničelno vrstico, ta pa ima ničelno determinanto. Sledi $\det A = 0$, torej matrika A nima inverza.

Če so vektorji $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linearno neodvisni, potem lahko vsak vektor izrazimo kot linearno kombinacijo teh vektorjev (to zahteva krajši premislek). Naj bo $\mathbf{e}_i$ vektor, ki ima na i-tem mestu enico, drugod pa same ničle. Razvijmo ga po vektorjih $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$:

$$\mathbf{e}_i = b_{i1}\mathbf{a}_1 + \ldots + b_{in}\mathbf{a}_n.$$

Naj bo B matrika, katere i-ta vrstica je enaka $(b_{i1}, \ldots, b_{in})$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Bralec naj preveri, da velja

$$BA = I.$$

Odtod sledi, da je $\det A \neq 0$, torej je matrika A obrnljiva.

Ker so stolpci matrike A enaki vrsticam matrike A^T, in ker ima matrika A^T inverz natanko tedaj, ko ima inverz matrika A (preveri, da je $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$), sledi, da so stolpci matrike A linearno neodvisni natanko tedaj, ko so linearno neodvisne njene vrstice. □

Oglejmo si primer uporabe te trditve:

Primer. Poiščimo enačbo hiperravnine v $\mathbb{R}^n$, ki gre skozi dane točke $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, kjer je $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Predpostavimo še, da so vektorji $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1$ linearno neodvisni, saj drugače rešitev ni enolična. Točka $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ leži na tej hiperravnini natanko tedaj, ko so vektorji $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_1$ linearno odvisni, to pa velja natanko tedaj, ko je

$$\det \begin{bmatrix} x_1 - a_{11} & x_2 - a_{12} & \ldots & x_n - a_{1n} \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \ldots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \ldots & a_{nn} - a_{1n} \end{bmatrix} = 0.$$

2.7. Vprašanja za ponavljanje

(1) (Pravokotne matrike)
   (a) Kako je definirano seštevanje matrik in kako množenje s skalarjem?
   (b) Naštej osnovne lastnosti teh dveh operacij. (Omeni tudi ničelne matrike!)
   (c) Kako je definirano množenje matrik? Kdaj je definicija smiselna?
   (d) Naštej osnovne lastnosti množenja! (Omeni tudi identične matrike!)

(2) (Elementarne matrike)
   (a) Definiraj elementarne matrike!
   (b) Kakšna je zveza med matrikama A in EA, kjer je E elementarna matrika?
   (c) Kakšna je zveza med matrikama A in AE, kjer je E elementarna matrika?

(3) (Gaussova eliminacija po matrično)
   (a) Kako sistem linearnih enačb zapišemo v matrični obliki?
   (b) Kako metodo Gaussove eliminacije zapišemo z elementarnimi matrikami?
   (c) Kakšno matriko dobimo na koncu Gaussove eliminacije? Kako rešimo pripadajoči sistem linearnih enačb?

(4) (Metoda najmanjših kvadratov po matrično)
   (a) Kako je definirano transponiranje matrik? Naštej osnovne lastnosti transponiranja!
   (b) S matrikami pojasni, kako poiščemo projekcijo točke na afino množico!
   (c) Z matrikami pojasni, kako poiščemo regresijsko premico!

(5) (Definicija determinante) Recimo da je A matrika velikosti 3×3. Kako izračunamo njeno determinanto
   (a) po definiciji?
   (b) z razvojem po drugi vrstici?
   (c) z razvojem po tretjem stolpcu?

(6) (Računanje determinant)
   (a) Kako izračunamo determinanto gornje trikotne matrike?
   (b) Povej, kaj so elementarne transformacije in kako vplivajo na vrednost determinante!
   (c) Kako izračunamo determinanto s pomočjo elementarnih transformacij?

(7) (Cramerovo pravilo)
   (a) Formuliraj Cramerovo pravilo za sisteme velikosti 2×2!

   (b) Formuliraj Cramerovo pravilo za sisteme velikosti 3×3!
   (c) Kdaj ne moremo uporabiti Cramerovega pravila?
(8) (Definicija inverza)
   (a) Kako je definiran inverz matrike?
   (b) Poišči neničelno matriko, ki nima inverza!
   (c) Pokaži, da matrika ne more imeti dveh različnih inverzov!
(9) (Primeri matrik z inverzom)
   (a) Izračunaj inverze elementarnih matrik!
   (b) Dokaži, da ima matrika AB inverz, če imata A in B inverza!
   (c) Dokaži, da ima matrika A^T inverz, če ima inverz matrika A!
(10) (Obstoj inverza) Zanima nas ali ima dana matrika inverz.
   (a) Kako to ugotovimo z Gaussovo eliminacijo?
   (b) Kako to ugotovimo z determinantami?
   (c) Kako to ugotovimo z linearno neodvisnostjo?
(11) (Računanje inverza)
   (a) Kako izračunamo inverz matrike z Gaussovo eliminacijo?
   (b) Pojasni metodo iz (a) na 2×2 matrikah!
   (c) Kako izračunamo inverz matrike s pomočjo determinant?
   (d) Pojasni metodo iz (c) na 2×2 matrikah!