Grupe

Spomnimo se, da je $(\mathbb{Z}_n, +)$ grupa ostankov pri deljenju z n, v kateri je operacija definirana takole: za $k, l \in \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots n-1\}$ je $k+l$ je ostanek pri deljenju $k+l$ z n, tj. natanko določeno število $r \in \mathbb{Z}_n$, da je $k + l = t \cdot n + r$ za celo število t. Enota je seveda 0, inverz elementa $k \neq 0$ pa je $n - k$.

1. Poišči red in inverz elementov 5, 7 in 21 v grupi $(\mathbb{Z}_{30}, +)$. Določi red in inverz elementa $m < n$ v grupi $(\mathbb{Z}_n, +)$.

2. Naj bo $f : G \to H$ homomorfizem grup. Naj bo $g \in G$ element reda n. Dokaži, da je $f(g)$ končnega reda in da red elementa $f(g)$ deli n. Koliko je red elementa g^{-1}? Koliko je red elementa g^m?

   Ali obstaja injektiven homomorfizem $(\mathbb{Z}_{12}, +) \to (\mathbb{Z}_{18}, +)$? Kaj pa $(\mathbb{Z}_{12}, +) \to (\mathbb{Z}_{24}, +)$?

3. Naj bo $(G, \circ)$ grupa in $g, h \in G$ elementa končnega reda, za katera $g \circ h = h \circ g$ (npr. disjunktna cikla neke permutacijske grupe S_n). Koliko je red elementa $g \circ h$?