Numerične metode (IŠRM) 2013/2014

1. domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-1.zip` in jih oddajte preko spletne učilnice (`http://ucilnica.fmf.uni-lj.si`) najkasneje do 24. decembra 2014 do 12. ure. Priložite poročilo, v katerem za vsako nalogo opišete postopek reševanja, zapišete rešitev, in komentirajte rezultat. Če poročilo skenirate, mora biti obvezno oddano v pdf obliki. Priložite programe, s katerimi ste naloge rešili. Programi naj bodo smiselno poimenovano in razporejeni v mapah, ki naj bo bodo poimenovane nal1, nal2, ... Naloge morajo biti rešene v Matlabu (uporabite lahko tudi Octave ali Scilab), razen če je v nalogi drugače navedno.

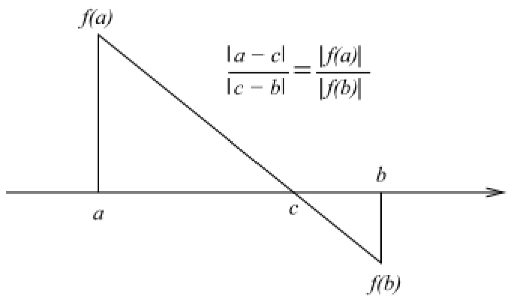
Če imate kakšno vprašanje o nalogah ali Matlabu, se obrnite na asistenta. Če menite, da je vprašanje zanimivo tudi za ostale, uporabite forum.

Naj bosta c_1c_2 zadnji 2 cifri vaše vpisne številke in c_1c_2 število, ki ga predstavljata ti dve cifri, potem je $C = 1 + c_1c_2/100$.

Vsaka naloga je vredna eno točko. Dodatna vprašanja lahko prinesejo dodatne točke. Dodatno nalogo ali vprašanje lahko rešite tudi namesto katere druge naloge.

1. Zapišite število $x = 6.9c_1c_2$ v formatu $P(2, 12, -6, 6)$ in v istem formatu izračunajte $\frac{x^2}{c_1+2*c_2+3} - x$ tako, da pri vmesnih rezultatih odrežete odvečne decimalke. Zapišite tudi vmesne rezultate in s kakšnim zaporedjem osnovnih operacij ste izračunali rezultat. Pomagajte si z računalnikom. Naloge ni potrebno rešiti v Matlabu.

2. Imamo $1c_1c_2$ m dolgo tračnico, ki je na obeh koncih trdno vpeta. Zaradi velike vročine se tračnica raztegne za $c_1 + c_2$ cm, in se zato dvigne od tal v obliki krožnega loka. Numerično izračunajte kolikšna je maksimalna oddaljenost od tal na 8 mest natančno. Pri reševanju enačbe, preizkusite naslednje metode za numerično računanje ničel, bisekcijo, tangetno metodo, sekantno metodo in metodo regula falsi. Uporabite lahko programe, ki jih najdete na internetu, le metodo regula falsi implementirajte sami. Metoda regula-falsi je podobna biskeciji. Pri metodi regula-falsi intervala ne razpolavljamo, ampak ga delimo v razmerju, da velja
$$\frac{|a-c|}{|c-b|} = \frac{|f(a)|}{|f(b)|}.$$



3. Vsi poznamo mit, da visoki košarkarji slabo mečejo proste mete. Ali zato obstaja matematična razlaga? Več o problemu lahko nadete v članku Optimal trajectory for the basketball free throw in na tej strani. Zgornji rob obroča je od tal oddaljen 3.05 m. Košarkarska žoga ima

Slika 1: Prosti met

obseg 75 cm, premer obroča je 45 cm. Bližji rob obroča je oddaljen 4.572 m v x smeri od črte za proste mete. Predpostavimo, da se lahko igralec premike samo pravokotno na črto za proste mete in stoji na sredini. Premakne se lahko do 1.8288 m nazaj. Žoga gre skozi obroč, če gre čezenj v vsem svojem obsegu v trenutku, ko je njeno težišče na višini obroča. Višina izmeta žoge igralca naj bo h, vodoravna oddaljenost od bližnjega roba obroča pa x. Višina izmeta je navpična oddaljenost težišča žoge od tal. Velikost hitrosti v_0 naj bo minimalna možna hitrost pri kateri gre težišče žoge skozi sredino obroča pri višini h. S tem je določen tudi kot izmeta. Predpostavite, da je velikost hitrosti meta zmeraj fiksna. V Matlabu napišite funkcijo `napaka(h, x)`, ki vrne interval kota izmeta pri katerem igralec zadane prosti met, če vrže s hitrostjo v_0. Narišite graf velikosti intervala kota v odvisnosti od h za $x = 4.572 + C/10$ m. Žoga ne more leteti dlje kot do sredine obroča, saj je v_0 določena optimalno. Druga skrajna lega je torej tista pri kateri gre žoga ravno čez prvi obroč.

Upor zanemarimo, tako se težišče žoge giblje po paraboli

$$y - y_0 = (x - x_0)\tan(\varphi) - g\frac{(x - x_0)^2}{2v^2\cos^2(\varphi)},$$

kjer je (x_0, y_0) začetni položaj težišča, v hitrost izmeta in φ kot izmeta. Za težni pospešek vzemite $g = 9,80665\frac{m}{s^2}$. Enačbe, ki jih dobite rešite numerično s kakšno iteracijsko metodo.

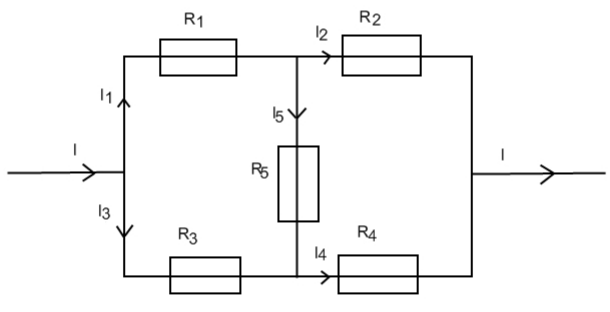
Podatke preizkusite za svojo višino izmeta in $x = 4.572 + C/10$. Višina izmeta je približno enaka vaša višini z iztegnjenimi rokami. Če hočete dobiti bolj natančen model, dopustite še variacijo hitrosti in modelirajte trajektorijo celotne žoge, ki se ne sme nikoli sekati z obročem. Ali mit drži? Kaj je z metanjem trojk in metanjem z raznih drugih razdalj?

Dodatno vprašanje. Določite še optimalno hitrost na intervalu $[v_0 - 2, v_0 + 2]$. Določite še minimalni kot pri katerem žoga lahko pade v koš.

4. V elektrotehniki večkrat naletimo na problem računanja nadomestne upornosti. Najbolj preprosta primera sta:

   - zaporedno vezani uporniki $R_i, i = 1, \ldots n$,
   - vzporedno vezani uporniki $R_i, i = 1, \ldots n$.

   V prvem primeru velja, $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$, za vzporedno vezane upornike pa $1/R = \sum_{i=1}^{n} 1/R_i$. Oba rezultata sta v resnici posledica Kirchoffovih zakonov. Kirchoffov zakon o toku pravi, da je vsota vhodnih tokov enaka vsoti izhodnih tokov. Kirchoffov zakon o napetosti pove, da je padec napetosti v vsaki krožni zanki 0. Zadnji Kirchoffov zakon pove, da velja $U = RI$. Naslednji primer na 5 upornikih ponazarja njihovo uporabo za izračun nadomestne upornosti.



Naslednje enačbe dobimo iz Kirchoffovega zakona o toku:

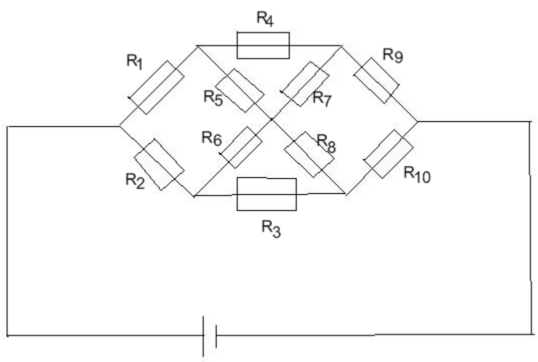
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_3 \\ I_1 &= I_2 + I_5 \\ I_3 + I_5 &= I_4 \end{aligned}$$

Uporabimo vsako vozlišče razen zadnjega, saj iz njega dobimo enačbo odvisno od prvih treh. Mankajoče tri enačbe dobimo iz Kirchoffovega zakona za napetosti za najkrajši dve možni zanki in zanko, ki gre skozi vir napetosti:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_5 I_5 - R_3 I_3 &= 0 \\ R_2 I_2 - R_4 I_4 - R_5 I_5 &= 0 \end{aligned}$$

Seveda velja še $U = R_1 I_1 + R_2 I_2$. Tako dobimo linearni sistem za 6 enačb in 6 neznank, ki ga rešimo. Nadomestno upornost izračunamo po formuli $R = \frac{U}{I}$.

Izračunajte tokove, ki tečejo skozi upornike in poiščite nadomestno upornost naslednjega vezja brez upornika $D = ((c_1 + c_2) \bmod 10) + 1$. Svoje vezje dobite tako, da v vezju na sliki odstranite povezavo z upornikom R_D. Napetost je enaka $U = 2013V$. Upornost upornikov R_i zge-



.

nerirajte z naslednjim zaporedjem ukazov:

```
rand('state',vpisna^2);
```

```
RR=rand(1, 10);
```

Tukja je `vpisna` vaša vpisna številka, i-ta komponenta RR je upornost upornika R_i.

Nasvet: Pri uporabi Kirchoffovega zakona za napetost vzemite najkrajše zanke. To so tiste zanke, ki so kvadrati ali trikotniki. Pomagajte si z zgledom. Najprej si morate izbrati smeri tokov skozi upornike. Pri napetosti morate upoštevati, da je v zanki v smeri, ki je nasprotna smeri toka padec napetosti negativen. Če sta dva upornika povezano zaporedno, ju lahko nadomestite z enim.

5. **Dodatna naloga** Na rob pašnika, ki ima obliko kroga z radijem 10 metrov, zabijemo količek in nanj privežemo kozo. Koliko mora biti dolga vrvica, s katero je privezana koza, da bo lahko v dolgem času popasla s% pašnika. Kakšen pa je odgovor, če je pašnik kvadrat ali enakostranični trikotnik s stranico 10 m? Namig: odgovor bo v tem primeru odvisen tudi od lokacije količka, odgovoriš lahko samo na en primer (kvadrat ali trikotnik). Odgovore ponazorite z grafom.