Numerične metode (IŠRM) 2013/2014

2. domača naloga

Rešitve stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-1.zip` in jih oddajte preko spletne učilnice (`http://ucilnica.fmf.uni-lj.si`) najkasneje do pondeljka, 27. januarja 2014 do 12. ure. Oziroma kakšen dan predenj bi radi šli na ustni izpit. Priložite poročilo, v katerem za vsako nalogo opišete postopek reševanja, zapišete rešitev, in komentirajte rezultat. Če poročilo skenirate, mora biti obvezno oddano v pdf obliki. Priložite programe, s katerimi ste naloge rešili. Programi naj bodo smiselno poimenovano in razporejeni v mapah, ki naj bo bodo poimenovane nal1, nal2, ... Naloge morajo biti rešene v Matlabu (uporabite lahko tudi Octave ali Scilab), razen če je v nalogi drugače navedno.

Če imate kakšno vprašanje o nalogah ali Matlabu, se obrnite na asistenta. Če menite, da je vprašanje zanimivo tudi za ostale, uporabite forum.

Naj bosta $c_1c_2c_3c_4$ zadnje 4 cifre vaše vpisne številke in c_1c_2, c_3c_4 števili v desetiškem zapisu, potem je $C = 1 + (c_1c_2 + c_3c_4)/200$.

Vsaka naloga je vredna eno točko. Dodatna vprašanja lahko prinesejo dodatne točke.

1. Na primeru aproksimacije s polinomom primerjajte natančnost metod za reševanje problema najmanjših kvadratov, ki so vgrajene v Matlabu (če katera od teh metod ni vgrajena v Matlabu, je program zanjo na spletni strani
http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/ nla/nla_primeri.htm):

    - operacija \,
    - normalni sistem,
    - psevdoinverz,
    - singularni razcep
    - QR razcepi z uporabo naslednjih metod:
        - Gram-Schmidt,
        - modificirani Gram-Schmidt (v tem primeru naredite QR razširjene matrike $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$),
        - Householderjeva zrcaljenja,
        - Givensove rotacije

Sestavite tabelo napak za vse zgornje metode. Napake so števila $||p - \widetilde{p}||_2$, kjer je p natančna rešitev, $\widetilde{p}$ pa rešitev, ki jo vrne vsaka od zgoraj navedenih metod.

Testni podatki in natančne rešitve se nahajajo na spletni strani http://www.itl.nist.gov/div898/strd/lls/data/Wampler2.shtml

Svoje testne podatke dobite tako, da vzamete podatke za $x = 0 : (7 + ((c_1 + c_2) \bmod 13))$.

2. Planet se giblje po eliptični orbiti. Znanih je deset meritev položaja planeta v (x, y) ravnini:

$$
\begin{aligned}
x &= [W \;\; 0.95 \;\; 0.87 \;\; 0.77 \;\; 0.67 \;\; 0.56 \;\; 0.44 \;\; 0.30 \;\; 0.16 \;\; 0.01],\\
y &= [0.39 \;\; 0.32 \;\; 0.27 \;\; 0.22 \;\; 0.18 \;\; 0.15 \;\; 0.13 \;\; 0.12 \;\; 0.13 \;\; 0.15],
\end{aligned}
$$

kjer je $W = 1 + \frac{1}{25} \cdot \frac{c_1 c_2 + c_3}{200}$. Določite koeficiente v kvadratni formi

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = -1,$$

ki se najbolje prilega podatkom po metodi najmanjših kvadratov. Narišite orbito, na sliko dodajte podane točke. Pomagajte si tako, da narišete nivojnico funkcije

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + 1$$

pri $z = 0$ z uporabo funkcije `contour`:

```
[X,Y]=meshgrid(xmin:deltax:xmax, ymin:deltay:ymax);
Z=a*X.^2 + b*X.*Y + c*Y.^2 + d*X + e*Y +1;
contour(X,Y,Z,[0 0])
```

3. Izračunajte funkcijo $f(x) = \cos^2(2 + C * x)$ v točkah $x_i = \frac{i}{5}$, za $i = 0, 1, \ldots, 5$. Določite vrednosti interpolacijskega polinoma $I(x_0, \ldots, x_5)$ v točkah $x = 0.25$ in $x = 0.95$ in ju primerjajte z vrednostmi $f(x)$ v obeh točkah. Ocenite napako metode in jo primerjajte z dejansko napako. Zakaj je le ta lahko večja od ocene?

4. Vandermondova matrika dimenzije $n \times m$ za točke $x_1, \ldots, x_n$ je oblike

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots & x_2^{m-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 \ldots & x_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Reševanje sistema $Va = y$ za Vandermondovo matriko dimenzije $n \times n$ je ekvivalentno interpolaciji funkcije z vrednostmi y_i v točkah x_i za $i = 1, \ldots, n$. Interpolacijski polinom je potem enak $p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots a_n x^{n-1}$. Napišite funkcijo, ki s pomočjo Vandermondove matrike poišče interpolacijski polinom za dana vektorja x in y. Kaj se zgodi z determinanto Vandermondove matrike, če vzamete $x_1 = x_2$.

Dodatna naloga Lahko namesto 1. in 2.

Na pošti bi radi avtomatsko prepoznavali ročno napisane števke. Števke so podane kot sivinske slike dimenzije 16×16. Matrični zapis slike pretvorimo v vektor, tako da sestavimo stolpce matrike v vektor dimenzije 256. Podana je baza učnih slik, kjer je `dzip.mat` vektor števk in `azip.mat` matrika katere stolpci predstavljajo slike. Bazo za določeno števko s dobimo na naslednji način. Stolpce testne matrike, ki predstavljajo to števko, sestavimo v matriko A_s. Nato naredimo singularni razcep matrike $A_s = U_s \Sigma_s V_s^*$. Za bazo števke B_s vzamemo nekaj prvih stolpcev (5 do 20) matrike U_s.

- Poiščite bazo B_s za vsako števko s. Vzemite kar prvih 5 stolpcev U_s.
- Prepričajte se, da prvi singularni vektor v bazi dobro predstavlja števko.
- Dobljene baze uporabi za klasifikacijo števk. Števko t, ki jo predstavlja vektor t, klasificirate tako, da izračunate $\min_z ||B_s z - t||_2$ za vsak s in pogledate pri katerem s je dosežen minimum. Napišite funkcijo `klas.m`, s pomočjo katere boste lahko klasificirali števke.
- Uspešnost klasifikacije preverite na testnih podatkih `dtest.mat` in `testzip.mat`. Podatki so podani enako kot učni podatki. Za vsako števko vrnite delež uspešnosti klasifikacije.
- Ali velikost baze števk bistveno vpliva na uspešnost klasifikacije?

Pri risanju slik si pomagajte s funkcijo `ima2.m`, ki sprejme sliko v vektorski obliki. Podatke v datotekah s končnico mat naložite z ukazom `load`.