Poglavje 9

Lastne vrednosti in vektorji

Naloga 9.1 *Gerschgorinov izrek.*
Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *in* $C_i = \{z \in \mathbb{C}_i, \quad |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|\}$ *krog v kompleksni ravnini, za* $i = 1, \ldots, n.$*. Vse lastne vrednosti matrike* A *ležijo v uniji krogov* $\cup_{i=1}^{n} C_i$*.*

Rešitev. Naj bo x lastni vektor in λ pripadajoča lastna vrednost. Poglejmo si enakost po vrsticah.

$$A(i,:)x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i.$$

Kar je ekvivalentno

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ii})x_i.$$

Uporabimo absolutno vrednost in ocenimo:

$$|\lambda - a_{ii}||x_i| = |\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq ||x||_\infty \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Naj bo $|x_k| = ||x||_\infty$. Če postavimo $i = k$ dobimo,

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Kar pomeni $\lambda \in C_k$. Iz tega že sledi, da vsaka lastna vrednost leži v uniji krogov. ∎

Naloga 9.2 *Naj bo* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *diagonalno dominantna, tj.*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad za \quad vsak \quad i.$$

Potem je A *obrnljiva.*

Rešitev. Dovolj je pokazati, da so vse lastne vrednosti različne od 0. Fiksirajmo lastno vrednost λ. Po izreku leži v vsaj enem krogu. Torej velja

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|.$$

Ali je lahko $\lambda = 0$. Če bi bila, bi veljalo $|a_{ii}| \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Kar je protislovje. Matrika je res obrnljiva. ∎

Posledica 9.1 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična, vse lastne vrednosti so realne. Vsak lastna vrednost leži v enem od intervalov*

$$[a_{ii} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|, a_{ii} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|].$$

Posledica 9.2 *Velja $|\lambda| \leq ||A||_\infty$.*

Dokaza posledic sta preprosta in ju prepuščam bralcu.

Naloga 9.3 *Določi območje v katerem se nahajajo lastne vrednosti matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 0.5 \\ 1.5 & -3 & 20 \end{bmatrix}.$$

Uporabi Gerschgorinov izrek.

Rešitev. Iz prve vrstice dobimo $|\lambda - 10| \leq 5$. Iz druge vrstice dobimo $|\lambda - 10| \leq 1.5$. Iz tretje vrstice dobimo $|\lambda - 20| \leq 4.5$. Oceno za območje lahko izboljšamo tako, da isto oceno naredimo za A^T in podobno matriko DAD^{-1}, kjer je D diagonalna matrika. Vsako območje je določeno z unijo krogov. Lastne vrednosti se nahajajo v preseku vseh območij. ∎

Naloga 9.4 *Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in T njena Schurova forma. Velja zveza $A = QTQ^H$, kjer je Q ortogonalna matrika in T zgornje trikotna matrika. Naj bo λ enostavna lastna vrednost matrike A. S pomočjo Schurove forme izračunaj pripadajoči lastni vektor.*

Rešitev. Za lastno vrednost in lastni vektor velja:

$$\begin{aligned} Ax = QTQ^H x &= \lambda x \\ QTQ^H x - \lambda \overbrace{QQ^H}^{I} x &= 0 \\ Q(T-\lambda I)Q^H x &= 0 \qquad /Q^H \cdot \\ (T-\lambda I)\underbrace{Q^H x}_{y} &= 0 \\ Ty &= \lambda y. \end{aligned}$$

Vektor y je lastni vektor za T. Lastna vrednost $\lambda = t_{ii}$ je eden izmed diagonalnih elementov T. Oglejmo si obliko

$$(T - t_{ii}I)y = \begin{bmatrix} \lambda_1 - t_{ii} & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & 0 & * & * \\ & & & * & * \\ & & & & \lambda_n - t_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ * \\ y_i \\ * \\ y_n \end{bmatrix} = 0.$$

Enakost si oglejmo po blokih.

$$T - \lambda I = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} i-1 & 1 & n-i \end{array} \\ \begin{array}{c} i-1 \\ 1 \\ n-i \end{array} & \begin{bmatrix} T_{11} - \lambda I & T_{12} & T_{13} \\ 0 & 0 & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} - \lambda I \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz tretje bločne vrstice dobimo $(T_{33} - \lambda I)y_3 = 0$, kar nam da $y_3 = 0$, saj je $(T_{33} - \lambda I)$ obrnljiva. Iz druge bločne vrstice pa dobimo $T_{23}y_3 = 0$, kar nam ne da nič novega. Iz prve bločne vrstice dobimo enačbo

$$(T_{11} - \lambda I)y_1 + T_{12}y_2 + T_{13}\overbrace{y_3}^{0} = 0,$$

iz česar dobimo

$$(T_{11} - \lambda I)y_1 = -T_{12}y_2.$$

Ker je y_2 skalar, lahko izberemo $y_2 = 1$. Torej je

$$y = \begin{bmatrix} -(T_{11} - \lambda)^{-1}T_{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q^H x.$$

Seveda sistem rešimo in ne računamo inverza. Na koncu dobimo $x = Qy$. ■

Algoritem 6: Potenčna metoda

$y = y^{(0)}$ začetni približek ;
$r = 0$;
while *premajhna natančnost* **do**
    $y^{(r+1)} = Ay^{(r)}$;
    $y^{(r+1)} = y^{(r+1)}/||y^{(r+1)}||_\infty$ normirana varianta;
    $r = r + 1$;
end

Naloga 9.5 *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Iščemo dominantne lastne vrednosti s potenčno metodo. Dokaži, da vektorji po smeri konvergirajo k dominantni lastni vrednosti. Ali lahko izluščimo lastne vektorje pripadjoče tem lastnim vrednostim? Obravnavaj naslednje primere.*

- *Dominantna lastna vrednost je ena sama, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.*
- *Dominantni lastni vrednosti sta dve, velja $\lambda_2 = \lambda_1$.*
- *Dominantni lastni vrednost sta dve, velja $\lambda_2 = -\lambda_1$.*

Rešitev. Primer $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.
Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pripadojoči lastni vektorji. Zapišimo $y^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Velja $y^{(r)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^r x_i$. Tako dobimo

$$\frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^{r+1} x_{i(k)}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^r x_{i(k)}} = \frac{\alpha_1\lambda_1 x_{1(k)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r \lambda_i x_{i(k)}}{\lambda_1 x_{1(k)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r x_{i(k)}}.$$

Ker je $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, velja

$$\lim_{r\to\infty} \frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \lambda_1$$

in $y^{(r)}$ konvergira k x_1 po smeri.
Primer $\lambda_1 = \lambda_2$.
Podobno kot prej dobimo

$$\frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \frac{\alpha_1\lambda_1 x_{1(k)} + \alpha_2\lambda_1 x_{2(k)} + \sum_{i=3}^n \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r \lambda_i x_{i(k)}}{\alpha_1 x_{1(k)} + \alpha_2 x_{2(k)} \sum_{i=3}^n + \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^r x_{i(k)}}.$$

Torej velja

$$\lim_{r\to\infty} \frac{y_k^{(r+1)}}{y_k^{(r)}} = \lambda_1$$

in $y^{(r)}$ konvergira po smeri proti $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Iz tega ne moremo dobiti lastnih vektorjev.
Primer $\lambda_2 = -\lambda_1$.
V tem primeru podzaporedje $z^{(r)} = y^{(2r)}$ konvergira po smeri k $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, faktor je λ_1^2. Podzaporedje $w^{(r)} = y^{(2r+1)}$ pa konvergira k $\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2$. Iz $y^{(r)} \doteq \alpha x_1 + \beta x_2$ in $y^{(r+1)} \doteq \alpha\lambda_1 x_1 - \lambda_1 \beta x_2$. Iz česar dobimo

$$\begin{aligned} \lambda_1 y^{(r)} + y^{(r+1)} &= 2\alpha\lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y^{(r)} - y^{(r+1)} &= 2\beta\lambda_1 x_2. \end{aligned}$$

■

Algoritem 7: Rayleighova iteracija

$\widetilde{z}_0 \neq 0$;
$z_0 = \frac{1}{||z_0||_\infty} \widetilde{z}_0$;
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  $\sigma_k := \rho(z_k, A) = \frac{z_k^T A z_k}{z_k^t z_k}$;
  reši $(A - \sigma_k I)\widetilde{z_{k+1}} = z_k$;
  $z_{k+1} = \frac{1}{||z_{k+1}||_\infty} \widetilde{z_{k+1}}$ - v praksi;
  $z_{k+1} = \frac{1}{||z_{k+1}||_2} \widetilde{z_{k+1}}$ - za naslednjo naloga;
end

Algoritem 8: *QR iteracija z enojnim premikom*

$A_0 = A$;
for $k = 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  $\eta_k = (A_k)_{n,n}$;
  $A_k - \eta_k I = Q_k R_k$;
  $A_{k+1} = R_k Q_k + \eta_k I$;
end

Naloga 9.6 *Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje tridiagonalne matrike dimenzije $n \times n$, kjer je $a_{i,i-1} = c$, $a_{ii} = a$, $a_{i,i+1} = b$ in $bc > 0$. Pomagaj si z ustrezno diferenčno enačbo s konstatnimi koeficienti.*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c & a & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}$$

Rešitev. Upoštevamo, da mora veljati $Ax = \lambda x$. Tako dobimo sistem enačb:

$$
\begin{aligned}
(a-\lambda)x_1 + bx_2 &= 0 && (9.1)\\
cx_{i-1} + (a-\lambda)x_i + bx_{i+1} &= 0, \quad \text{i = 2, \ldots, n-1} && (9.2)\\
cx_{n-1} + (a-\lambda)x_n &= 0 && (9.3)
\end{aligned}
$$

Zaradi lažjega računanja uvedemo še spremenljivki x_0 in x_n ter robna pogoja $x_0 = x_n = 0$. Torej rešujemo diferenčno enačbo

$$cx_{i-1} + (a-\lambda)x_i + bx_{i+1} = 0.$$

Uporabimo nastavek za homogeno rešitev $x_i = r^i$ in dobimo kvadratno enačbo za r,

$$c + (a-\lambda)r + br^2 0.$$

Enačbo rešimo, rešitvi sta

$$r_{1,2} = \frac{-(a-\lambda) \pm \sqrt{(a-\lambda)^2 - 4bc}}{2b}$$

Zapis se poenostavi, če uvedemo

$$\cos(\varphi) = \frac{\lambda - a}{2\sqrt{bc}}.$$

$$r_{1,2} = \sqrt{\frac{b}{c}}\left(\cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1} = \sqrt{\frac{b}{c}}(\cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)\right) = \sqrt{\frac{b}{c}}e^{\pm i\varphi}.$$

Tako dobimo nastavek za rešitev $x_i = \alpha e^{i\varphi} + \beta e^{-i\varphi}$. Upoštevamo še robne pogoje

$$
\begin{aligned}
x_0 = \alpha + \beta &= 0\\
x_{n+1} = \alpha e^{(n+1)i\varphi} + \beta e^{-(n+1)i\varphi}
\end{aligned}
$$

Iz prve enačbe dobimo $\beta = -\alpha$. Iz druge enačbe dobimo

$$\alpha\left(e^{(n+1)i\varphi} - e^{-(n+1)i\varphi}\right) = i \cdot 2\sin((n+1)\varphi).$$

Njena rešitev je

$$(n+1)\varphi = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{n+1},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Rešitev s $k = 0$ ni dobra, saj potem sledi $x_i = 0$ za vsak i. Tako dobimo

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{n+1},\ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Za lastne vrednosti velja

$$\cos(\varphi) = \frac{\lambda - a}{2\sqrt{bc}} \Rightarrow \lambda_k = a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Pripadajoči lastni vektor ima komponente

$$x_j^{(k)} = \sqrt{\frac{b}{c}}\left(e^{i\cdot j\cdot\varphi_k} - e^{-i\cdot j\cdot\varphi_k}\right).$$

Zanima nas le smer, vzamemo lahko kar

$$x_j^{(k)} = \sin\left(\frac{j\cdot k\cdot\pi}{n+1}\right).$$

■

Naloga 9.7 *Naj bo A simetrična matrika z lastnimi pari $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Naj bo x aproksimacija za lastni vektor x_1 in naj bo $\mu = \rho(A, x)$ Rayleighov kvocient za x. Potem sledi*

$$|\mu - \lambda_1| \leq 2||A|| ||x - x_1||_2^2.$$

Dokaži.

Rešitev. Matrika A je simetrična, torej lastni vektorji tvorijo ortonormirano bazo. BŠS lahko privzamemo, da velja $||x||_2 = 1$. Vektor x razvijemo po ortonormirani bazi,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \text{ iz } ||x||_2 = 1 \text{ sledi } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1.$$

Kratek račun pokaže, da je

$$\mu = x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2.$$

Tako velja

$$|\mu - \lambda_1| = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \right| = \left| \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1) \alpha_i^2 \right| \leq 2||A|| \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2.$$

Upoštevali smo, da velja

$$|\lambda_i - \lambda_1| \leq |\lambda_i| + |\lambda_1| \leq 2||A||.$$

Izračunajmo še

$$||x - x_1||_2^2 = (\alpha_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \geq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2,$$

tako dobimo

$$|\mu - \lambda_1| \leq 2||A|| ||x - x_1||_2^2.$$

■