Poglavje 2

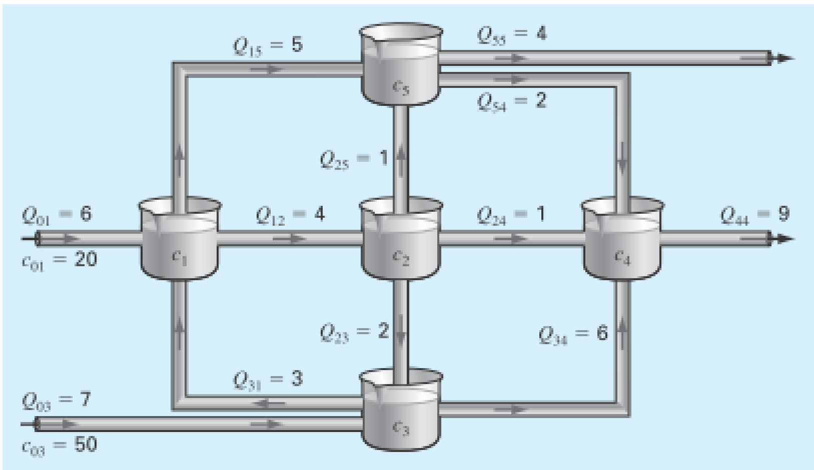
Matlab, norme, linearni sistemi

Naloga 2.1 *Z Matlabom poišči protiprimer, ki pokaže, da*

$$N_\infty(A) = \max_{1\le i,\, j\le n} |a_{ij}|$$

ni matrična norma. Pomagaj si z generiranjem naključnih matrik. Ali ti uspe poiskati celoštevilsko matriko?

Naloga 2.2 *Pet reaktorjev je povezanih s cevmi na način prikazan na spodnji sliki.*



Masni pretok skozi vsako cev izračunamo kot produkt toka (Q) *in koncentracije* (c). *V ravnovesju sta masni pretok iz reaktorja in v reaktor enaka. Za prvi masni reaktor dobimo enačbo:*

$$Q_{01}c_{01} + Q_{31}c_3 = Q_{15}c_1 + Q_{12}c_1.$$

Zapiši preostale mankajoče enačbe in jih reši v MATLABU. Kaj lahko poveš o občutljivosti sistema?

Naloga 2.3 *Iščemo koeficiente polinoma* $p(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, *ki na* $[0, 1]$ *aproksimira zvezno funkcijo* f *tako, da je napaka*

$$E = \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$$

minimalna. Torej mora veljati $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$ *za* $i = 1, \ldots, n$, *kjer je*

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 2\int_0^1 (p(x) - f(x))x^{i-1}dx.$$

Definirajmo vektor

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \quad \textit{in;} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$F_i = \int_0^1 f(x)x^{i-1}dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_j x^{j-1}x^{i-1}\right)dx = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 x^{i+j-2}dx = \sum_{j=1}^n a_j \frac{1}{i+j-1}.$$

Dobimo sistem s Hilbertovo matriko H_n, $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. *Kar je sistem* $Ha = F$. *Primer za* $n = 5$ *je*

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Hilbertove matrike so primer zelo občutljivih matrik. Pogojenostno število H_5 *je recimo približno* $4.766 \cdot 10^5$, *kar lahko izračunamo z ukazom cond v Matlabu. Pogojenostna števila matrik* H_n *hitro rastejo. Nariši graf pogojenostnega števila v odvisnosti od* n. *Za vsako stopnjo polinoma izračunaj še napako* E *in nariši njen graf, če aproksimiraš funkcijo* $\sin(\pi x)$. *Primerjaj dobljene rezultate z oceno s predavanj.*

Izkaže se, da smo dobili občutljiv sistem, ker smo vzeli standardno bazo polinomov stopnje n. *Za stabilno računanje je potrebno vzeti ortogonalno bazo polinomov.*

Naloga 2.4 *Napiši funkcijo v MATLABu v kateri implemtiraš Gaussovo eliminacijo z delnim pivotiranjem (če uporabnik zahteva vrni tudi matriki* L *in* U, *ki tvorita* LU *razcep). Funkcija naj vrne še determinatno matrike in prepozna, če je sistem blizu 'singularnega' (determinanta blizu nič, tj. manj kot predpisana toleranca). A je to dober kriterij? Namig, velike digaonalne matrike. Prva vrstic funkcije naj bo* `function [x, D] = GaussPivotDet(A, b, tol),` *kjer je D determinanta in tol predpisana toleranca. Pri delnem pivotiranju je pivotna rast omejena z* 2^{n-1}, *ponavadi pa je* $O(n^{2/3})$. *Testiraj svojo funkcijo na Hilbertovih matrikah, kakšna je pivotna rast v tem primeru?*