Poglavje 6

Matrične norme

Matrična norma je preslikava $||.|| : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}^+$, za katero velja

(i). $||A|| \geq 0,\ ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

(ii). $||\alpha A|| = |\alpha|||A||$,

(iii). $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$,

(iv). $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$, submultiplikativnost.

Za poljubni matriki A in B in poljuben $\alpha \in \mathbb{C}$.

Naloga 6.1 *Pokaži, da je*

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

matrična norma. Tukaj je $||.||$ poljubna vektorska norma.

Rešitev. Očitno velja $||A|| \geq 0$. Če velja $||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$, sledi da je $Ay = 0$ za vsak y, torej je $A = 0$. Velja tudi

$$||\alpha A|| = \sup_{||x||=1} ||\alpha Ax|| = \sup_{||x||=1} |\alpha|||Ax|| = |\alpha| \sup_{||x||=1} ||Ax|| = |\alpha|||A||.$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned} ||A + B|| = \sup_{||x||=1} ||(A + B)x|| = \sup_{||x||=1} ||Ax + Bx|| &\leq \sup_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \\ &\leq \sup_{||x||=1} ||Ax|| + \sup_{||x||=1} ||Bx|| = ||A|| + ||B||. \end{aligned}$$

Lotimo se še zadnjega pogoja, definirajmo še $y = Bx$.

$$\begin{aligned} ||AB|| &= \sup_{||x||=1} ||(AB)x|| = \sup_{||x||=1, Bx\neq 0} \frac{||(AB)x||}{||Bx||}||Bx|| \\ &= \sup_{||x||=1, y=Bx, y\neq 0} ||A\left(\frac{y}{||y||}\right)|| \cdot ||Bx|| \\ &\leq \sup_{||x||=1, y=Bx, y\neq 0} ||A\left(\frac{y}{||y||}\right)|| \cdot \sup_{||x||=1} ||Bx|| \\ &= \sup_{||x||=1, y=Bx, y\neq 0} ||A\frac{y}{||y||}|| \cdot ||B|| \leq \sup_{||y||=1} ||Ay|| \cdot ||B|| \end{aligned}$$

$$= ||A|| \cdot ||B||.$$

Dokaz je krajši, če upoštevamo definicijo norme in ugotovimo, da velja $||Ax|| \leq ||A||||x||-$ S tem smo končali. Upoštevali smo, da je supremum vsote pozitivnih števil manjši od vsote supremumov. To prav tako velja za množenje. Zadnji neenačaj dobimo, ker je supremum po večji množici kvečjemu večji. ■

Naloga 6.2 (Vaje) *Pokaži naslednje.*

a) Dokaži, da

$$N_\infty(A) = \max_{1\leq i,\, j\leq n} |a_{ij}|$$

ni matrična norma.

b) Dokaži, da velja $||A||_F^2 = sl(A^HA) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^HA)$*, kjer so* λ_i *lastne vrednosti* A^HA*.*

Rešitev. a)
Da so prve tri lastnosti matrične norme izpolnjene hitro preverimo. Matrika ima normo nič, natanko takrat ko je njen največji element po absolutni vrednosti enak 0. Če matriko množimo s skalarjem, se največji element matrike množi z absolutno vrednostjo tega skalarja. Pri tretji lastnosti uporabimo trikotniško neenakost in dejstvo, da je maksimum vsote pozitivnih števil manjši od maksimuma številih vsote po posameznih številih. Definirajmo matriki A in B takole

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \;\; A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Velja $N_\infty(A) = 1,\; N_\infty(B) = 1,\; N_\infty(AB) = 2$. Veljati bi moralo $N_\infty(AB) \leq N_\infty(A)N_\infty(B)$, vendar $2 \not\leq 21$. Submultiplikativnost ni izpolnjena. Alternativna možnost je, da take matrike poizkusimo poiskati v Matlabu z ukazom `randi`, ku generira celoštevilske naključne matrike
b)
Za $B = A^HA$ velja $b_{ii} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{ki}}a_{ki} = \sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2$. Tako za sled B dobimo

$$sled(A^HA) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{ki}|^2 \right) = ||A||_F^2.$$

Matrika A^HA je simetrična, torej se da diagonalizirati. Podobna je matriki z lastnimi vrednostmi na diagonali. Sled podobne matrike je enaka sledi prvotne matrike, tako dobimo $||A||_F^2 = sl(A^HA) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A^HA)$. ■

Naloga 6.3 (Vaje) *Pokaži naslednje:*

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F$

b) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_\infty$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$

d) $N_\infty(A) \leq ||A||_2 \leq nN_\infty(A)$

Rešitev. a)
Vemo, da velja

$$||A||_2 = \max_{i=1,\dots,n} \sqrt{\lambda_i(A^H A)} = \sigma_1(A) \text{ in } ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^H A).$$

Lastne vrednosti $A^H A$ so nenegativne, saj velja $< A^H Ax, x >=< \mu x, x >= \mu =< Ax, Ax >\geq 0$, $\lambda_i = \sigma_i^2$. Razporedimo jih v zaporedje $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \ldots \geq \sigma_n^2 \geq 0$. Pozitivni koreni teh lastnih vrednosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0$ so singularne vrednosti matrike A. Očitno je $||A||_2 \leq ||A||_F$, saj je $||A||_2$ enaka $\sigma_1(A)$, kar je največja singularna vrednost matrike A. Poglejmo si $||A||_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leq n\sigma_1^2 = n||A||_2$, kar pomeni $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \leq ||A||_2$. Neenačaj dobimo, ker je $\sigma_1(A)$ največja singularna vrednost.
b)
Za vektorske norme velja

$$||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2} = ||x||_2 \leq \sqrt{n \max_i |x_i|^2} = \sqrt{n}||x||_\infty,$$

to je $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$. Razmisli zakaj neeneakosti držijo, vsi sklepi so enostavni. Iz tega dobimo

$$||A||_2 = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\sqrt{n}||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \sqrt{n}||A||_\infty$$

in

$$||A||_2 = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \geq \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||_\infty}{\sqrt{n}||x||_\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty.$$

c)
Velja $||A||_1 = ||A^H||_\infty$ in $||A||_2 = ||A^H||_2$. Iz tega že sledi neenakost.
d)
Iz a) vemo

$$||A||_2 \leq ||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \leq \sqrt{n^2 \max_{i,j} |a_{ij}|^2} = n \max_{i,j} |a_{ij}| = nN_\infty(A).$$

Za drugi del neenakosti upoštevamo $a_{ij} = e_i^T Ae_j$. Računajmo

$$|a_{ij}| = |e_i^T Ae_j| \leq ||e_i||_2||Ae_j||_2 = \frac{||Ae_j||_2}{||e_j||_2} \leq ||A||_2.$$

Prvi neenačaj dobimo po Cauchy-Schwartzovi neenakosti, zadnjega pa po definiciji norme $||A||_2$.
■

Naloga 6.4 (Vaje) *Izračunaj* $||\ ||_1$, $||\ ||_\infty$, $||\ ||_F||$ *za* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *in oceni* $||\ ||_2$.

Rešitev. Izračunajmo

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max\{|2|+|5|+|-2|,\ |-1|+|4|+|-1|,\ |3|+|1|+|2|\} = 9, \\ ||A||_\infty &= \max\{|2|+|-1|+|3|,\ |5|+|4|+|1|,\ |-2|+|-1|+|2|\} = 10, \\ ||A||_F &= \sqrt{4+1+9+25+16+1+4+4} = \sqrt{65} \doteq 8.06226. \end{aligned}$$

Ocenimo $||A||_2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}||A||_F \le ||A||_2 \le ||A||_F &\quad\Rightarrow\quad 4.65475 \le ||A||_2 \le 8.06226 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}||A||_\infty \le ||A||_2 \le \sqrt{3}||A||_\infty &\quad\Rightarrow\quad 5,7735 \le ||A||_2 \le 17,3205 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}||A||_1 \le ||A||_2 \le \sqrt{3}||A||_1 &\quad\Rightarrow\quad 5,19615 \le ||A||_2 \le 15,58846 \\ N_\infty(A) \le ||A||_2 \le 3N_\infty(A) &\quad\Rightarrow\quad 5 \le ||A||_2 \le 15. \end{aligned}$$

Skupaj dobimo oceno $5.7735 \le ||A||_2 \le 8.06226$. Boljšo oceno dobimo, če poskusimo oceniti spektralni radij matrike

$$B = A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 20 & 7 \\ 20 & 8 & -1 \\ 7 & -1 & 14 \end{bmatrix}.$$

Za vsako lastno vrednost in vsako normo velja $\lambda_i(B) \le ||B|_F = 50.0899$. Vemo, da velja

$$||A||_2 \le \sqrt{||B||_F} = 7.0774.$$

Oceno navzdol dobimo, če upoštevamo $||A||_2 = ||A^T||_2$ in $||Ae_i||_2 \le ||A||_2||e_i||_2 = ||A||_2$, zadnja enakost sledi iz definicije matrične norme. Vektorji Ae_i so ravno i-ti stolpci, $A^T e_i$ so i-te vrstice. Norme vrstic so $5.7446,\ 4.2426, 3.7417$. Norme stolpcev so $3.7417,\ 6.4807,\ 3$. Torej dobimo $||A||_2 \ge 6.4807$. Končna ocena je $6.4809 \le ||A||_2 \le 7.0774$. Ukaz iz Matlaba vrne $\texttt{norm}(A) = 6.9044$. V Matlabu preizkusi še, če smo tudi druge norme izračunali pravilno. ∎

Naloga 6.5 *Matrična norma $||.||_M$ je usklajena z vektorsko normo $||.||_V$, če za vsako matriko A in vsak vektor x velja $||Ax||_V \le ||A||_M||x||_V$.*

Dokaži:

a) Za vsako matrično normo $||.||_M$ obstaja taka vektorska norma $||.||_V$, ki je z njo usklajena.

b) Za vsako lastno vrednost matrike A in za poljubno matrično normo velja ocena $|\lambda(A)| \le ||A||_M$.

c) Velja $||A||_2^2 \le ||A||_1||A||_\infty$.

Rešitev. a)
Imamo matrično preslikavo $||.||_M$. Naj bo $\overline{M}$ preslikava, ki vektorju x priredi matriko $\overline{M}(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Definirajmo vektorsko normo $||x||_V := ||\overline{M}(x)||_M$. Tako dobimo

$$||Ax||_V = || \begin{bmatrix} Ax & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} ||_M = ||A \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} ||$$

$$\le ||A||_M|| \begin{bmatrix} Ax & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} ||_M = ||A||_M||x||_V.$$

b)
Naj bo λ lastna vrednost, $Av = \lambda v$. Po točki a) obstaja vektorska norma, ki je usklajena z matrično. Tako sledi

$$|\lambda| ||v||_V = ||\lambda v||_V = ||Av||_V \leq ||A||_M ||v||_V,$$

kar pomeni, da velja $|\lambda| \leq ||A||_M$.
c)
Vemo, da je $||A||_2^2$ največja lastna vrednost matrike $A^H A$. Iz b) dobimo

$$||A||_2^2 \leq ||A^H A||_\infty \leq ||A^H||_\infty ||A||_\infty = ||A||_1 ||A||_\infty.$$

■

Naloga 6.6 *Izračunaj* $||A||_1$, $||A||_\infty$, $||A||_F$ *in čim natančneje oceni* $||A||_2$ *na obe strani, če je*

$$\begin{aligned} a_{ii} &= -2i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n \\ a_{i+1,i} &= a_{i,i+1} = n - i,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n, \end{aligned}$$

drugi elementi so enaki 0.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & n-1 & & & \\ n-1 & -4 & n-2 & & \\ & n-2 & -6 & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2n \end{bmatrix}.$$

Upoštevaj, da velja

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Rešitev. Pri $i = 1$ dobimo za vsoto absolutnih vrednosti v stolpcu $n + 1$, kar očitno ni maksimum. Izračunajmo

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max_{i \neq 1} \{|-2i| + |n-i| + |n-i+1|\} = \max_{i \neq 1} \{2i + n - i + n - i + 1\} \\ &= \max_{i \neq 1} \{2n+1\} = 2n + 1. \end{aligned}$$

Ker je matrika simetrična velja $||A||_1 = ||A^H||_\infty = ||A||_\infty = 2n + 1$. Frobeniusova norma je

$$\begin{aligned} ||A||_F^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} i^2 = 6 \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 4n^2 = 6 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 4n^2 = \\ n(n-1)(2n-1) + 4n^2 = n(2n^2 - 3n + 1) + 4n^2 = 2n^3 + n^2 + n. \end{aligned}$$

Poglejmo si ocene za drugo normo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} ||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2n^3 + n^2 + n} \leq ||A||_2 \leq \sqrt{2n^3 + n^2 + n} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} ||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n} ||A||_\infty \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} (2n+1) \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n} (2n+1) \\ N_\infty(A) \leq ||A||_2 \leq n N_\infty(A) \Rightarrow 2n \leq ||A||_2 \leq 2n^2. \end{aligned}$$

Upoštevamo še, da velja $||A||_2^2 \leq ||A||_1||A||_\infty$. Iz tega dobimo

$$||A||_2^2 \leq (2n+1)^2,$$

kar pomeni $||A||_2 \leq 2n+1$. Za drugo normo smo dobili oceno

$$2n \leq ||A||_2 \leq 2n+1.$$

■