Poglavje 5

Nelinearne enačbe

Naloga 5.1 (Vaje) *Za funkcijo $f(x) = x^3+1$ naredi korak bisekcije in tangentne metode. Vzemi $a = x_0 = -0.9$ in $b = -1.2$.*

Rešitev. Korak bisekcije je $f(a) = f(-0.9) = (-0.9)^3 + 1 = 0.271$, $f(b) = f(-1.2) = (-1.2)^3 + 1 = -0.728$, $\texttt{sign}(f(a)f(b)) = -1$. Zato lahko izvedemo korak bisekcije. Nadaljujmo: $c = (a + b)/2 = -1.05$, $f(c) = (-1.05)^3 + 1 = -0.157625$, $\texttt{sign}(f(a)f(c)) < 0$, torej vzamemo $b = c$. To ponavljamo.

Za korak tangentne metode potrebujemo odvod $f'(x) = 3x^2$. Izračunajmo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0.9 - \frac{(-0.9)^3 + 1}{3(-0.9)^2} \doteq 1,0115.$$

Bisekcijo in sekantno metoda uporabljam takrat, ko ne poznamo odvoda ali pa je računanje odvoda zahtevno. ■

Izrek 5.1 *Naj bo α koren enačbe $x = g(x)$, naj bo g zvezno odvedljiva na $I = [\alpha - d, \alpha + d]$ in naj velja $|g'(x)| \leq m < 1$ za vsak $x \in I$. Potem za vsak $x_0 \in I$ zaporedje*

$$x_{r+1} = g(x_r),\ r = 0, 1, \cdots$$

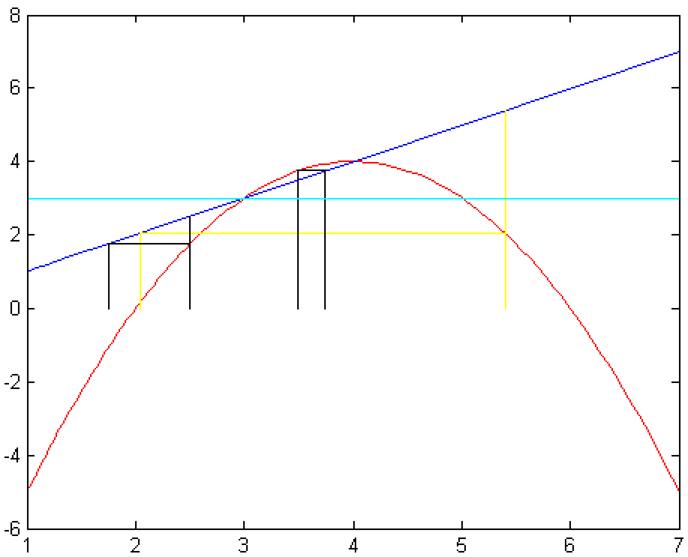
konvergira k α in velja ocena za napako

$$|x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|.$$

Izrek 5.2 *Imamo začetno točko x_0 in interval $I = [x_0-d, x_0+d]$. Če velja $|g(x)-g(y)| \leq m|x-y|$ za $m < 1$ in $|g(x_0) - x_0| \leq (1 - m)d$, potem zaporedje x_r konvergira k α in velja $f(\alpha) = 0$.*

Izrek 5.3 *(Banachovo skrčitveno načelo) Naj bo M poln metričen prostor in $g : M \to M$. Tedaj obstaja natanko ena negibna (fiksna) točka preslikava g, t.j. taka točka $a \in M$, da je $g(a) = a$. Če je $x_0 \in M$ poljubna točka, tedaj zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergira k a. Primer polnega metričnega prostora v $\mathbb{R}$ je zaprti interval.*

Naloga 5.2 (Vaje) *Za katere začetne približke je navadna iteracija za reševanje $x = g(x)$, kjer je $g(x) = -12 + 8x - x^2$, konvergentna? Kam konvergira zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$? Kakšen je red konvergence? Kje nam konvergenco zagotavlja izrek (Banachovo skrčitveno načelo) ? Namig: začetne približke išči na intervalu.*



Slika 5.1: Koraki iteracije

Rešitev. Iz slike preberemo, da je kandidat za območje konvergence interval $[3,5]$. V naslednjih točkah bomo pokazali, da je ta interval res dobra izbira.

(i). Pokažimo, da velja: $x_r < 3 \Rightarrow x_{r+1} < x_r$. Za take začetne približke bomo imeli divergenco. Oglejmo si $x_r - x_{r+1}$ in pokažimo, da je izraz pozitiven. Izračunajmo

$$x_r - x_{r+1} = x_r - g(x_r) = x_r - (-12 + 8x_r - x_r^2) = 12 - 7x_r + x_r^2 = (x_r - 4)(x_r - 3).$$

Zadnji izraz v enakosti je v primeru $x_r < 3$ strogo pozitiven.

(ii). Velja tudi: $x_0 > 5 \Rightarrow x_1 < 3$. Spet dobimo divergenco. Oglejmo si izraz $3 - x_1$, to nam da

$$3 - x_1 = 15 - 8x_0 + x_0^2 = (x_0 - 5)(x_0 - 3) > 0.$$

(iii). Poleg tega velja $|x_{r+1} - 4| \leq |x_r - 4|$ za $x_r \in (3,5)$. Izračunajmo

$$|x_{r+1} - 4| = | - 12 + 8x_r - x_r^2 - 4| = | - 16 + 8x_r - x_r^2| = (x_r - 4)^2, \tag{5.1}$$

ker je x_r na $(3,5)$, sledi $|x_r - 4| < 1$ in potem $|x_r - 4|^2 < |x_r - 4|$.Vidimo, da velja tudi $|x_r - 4| = |x_0 - 4|^{2^r}$, kar že zagotavlja konvergenco. Zvezo dobimo z zaporedno uporabo enačbe (5.1).

(iv). Za robne točke velja $g(3) = g(5) = 3$.

Naši možni rešitvi sta $x_1 = 4$ in $x_2 = 3$, x_2 dobimo samo v primeru robnih točk, kar je praktično nemogoče. Zato si oglejmo red konvergence za okolico ničle $x_1 = 4$. Spomnimo se, da velja: metoda je reda p, natanko takrat ko $g'(x_1) = \cdots = g^{(p-1)}(x_1) = 0$ in $g^{(p)}(x_1) \neq 0$. Odvod je $g'(x) = 8 - 2x$, torej je $g'(4) = 0$. Red je vsaj kvadratičen. Drugi odvod je enak $g''(x) = -2$. Torej je red kvadratičen.

Izrek nam konvergenco zagotavlja na intervalu, kjer velja $|g'(x)| < 1$. Torej mora veljati |8-2x|< 1, to pa je $3.5 < x < 4.5$. Izrek nam da torej le potreben pogoj, iterativna metoda pa lahko konvergira še na večjem intervalu. ∎

Naloga 5.3 (Vaje) *Iščemo rešitve enačbe $f(x) = x^5 - 10x + 1 = 0$. Za iteracijsko funkcijo izberemo $g(x) = \frac{x^5+1}{10}$. Ali nam izrek zagotavlja konvergenco za $x_0 = 0$? Oceni napako drugega približka.*

Rešitev. Za odvod mora veljati $|g'(x)| \leq m < 1$. Kar je $|\frac{x^4}{2}| < 1$, $|x| < \sqrt[4]{2} \doteq 1.1892$. Torej imamo za x_0 konvergenco. Napako drugega približka bomo ocenili s pomočjo formule $|x_r - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r - x_{r-1}|$. Oceniti moramo še m, izberemo si interval $[0, 1]$, kjer je funkcija skrčitev. Vidimo, da velja $m \leq \frac{1^4}{2} = 0.5$. Imamo $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.100001$ in

$$|x_2 - \alpha| \leq \frac{0.5}{1 - 0.5}|0.100001 - 0.1| \doteq 8 \cdot 10^{-6}.$$

Če hočemo uporabiti izrek 5.2, izberemo recimo interval $[-0.2, 0.2]$, kjer je $d = 0.2$. Na tem intervalu ocenimo $m \leq \frac{0.2^4}{2} \leq 0.0008$. Poleg tega velja tudi $|g(0) - 0| = 0.1 \leq (1 - 0.0008)0.2$. Vsi pogoji so izpolnjeni. ∎

Tangentno metodo dobimo, če za naslednjo točko v iteraciji vzamemo presečišče tangente na funkcijo f z osjo x. Tako dobimo $x_{r+1} = g(x_r) = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$.

Izrek 5.4 *Za tangentno metodo velja naslednji izrek. Naj velja $f(\alpha) = 0$ in naj bo α m-kratna ničla. Če je $m = 1$, je konvergenca vsaj kvadratična. Če velja še $f''(\alpha) = 0$, je konvergenca kubična. Če imamo večkratno ničlo $m \geq 2$, velja $\lim_{x\to\alpha} g'(x) = 1 - 1/m$.*

Rešitev. Na vajah smo ubrali drugo pot do rešitve, ki ni bila preveč pregledna. V tej rešitvi je predstavljen preglednejši dokaz z uporabo pravila L'Hopital.

Dokazali bomo samo drugi del izrek, saj je prvi enostaven. Če je α m-kratna ničla funkcije f, potem po definiciji obstaja $l \neq 0$, da velja $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^m} = l$. Po L'Hopitalu dobimo $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}} = l$, saj gresta imenovalec in števec proti 0. Najprej pokažimo, da velja $\lim_{x\to\alpha} x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \alpha$. Zadosti bo, da dokažemo $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$. Imenovalec in števec delimo z $(x - \alpha)^m$, dobimo

$$\lim_{x\to\alpha} (x - \alpha) \frac{\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m}}{m\frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}}} = \lim_{x\to\alpha} (x - \alpha)\frac{l}{ml} = 0.$$

Izračunajmo še limito odvoda:

$$g'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - g(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \alpha}{x - \alpha} = 1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)(x - \alpha)}.$$

Nadaljujmo

$$1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{f'(x)(x - \alpha)} = 1 - \lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{f(x)}{(x-\alpha)^m}}{m\frac{f'(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}}} = 1 - \frac{l}{ml} = 1 - \frac{1}{m}.$$

∎

Naloga 5.4 (Vaje) *Poišči red konvergence iterativne metode $x_{r+1} = g(x_r) = x_r \frac{x_r^2+3a}{3x_r^2+a}$ za iskanje korena $\sqrt{a}$, kjer $a \neq 0$. Pokaži, da je konvergentna za vsak $x_0 > 0$.*

Rešitev. Odvod je enak

$$g'(x) = \frac{x^2+3a}{3x^2+a} + x\frac{-6x(x^2+3a)+2x(3x^2+a)}{(3x^2+a)^2}$$

$$= \frac{3x^4+10ax^2+3a^2-16ax^2}{(3x^2+a)^2} = \frac{3(x^4-2ax^2+a^2)}{(3x^2+a)^2} = 3\frac{(x^2-a)^2}{(3x^2+a)^2},$$

velja torej $g(\sqrt{a}) = g'(\sqrt{a}) = 0$. Izračunajmo še drugi odvod

$$g''(x) = 3\frac{4x(x^2-a)(3x^2+a)^2 - 12x(x^2-a)^2(3x^2+a)}{(3x^2+a)^4}$$

$$= \frac{12x(x^2-a)(3x^2+a-3x^2+3a)}{(3x^2+a)^3} = \frac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^2}.$$

Izračunajmo še tretji odvod

$$g'''(x) = \frac{48xa}{(3x^2+a)^3}\cdot 2x + (x^2-a)\cdot\Box\,|_{x=\sqrt{a}} = \frac{96a^2}{64a^3} = \frac{3}{2a} \neq 0.$$

Metoda je torej reda 3. Poglejmo si razliko $g(x_r) - \sqrt{a}$:

$$g(x_r) - \sqrt{a} = x\left(\frac{x_r^2+3a}{3x_r^2+a}\right) - \sqrt{a} = \frac{x_r^3+3ax_r-3x_r^2\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{3x_r^2+a} = \frac{(x_r-\sqrt{a})^3}{3x_r^2+a}.$$

Tako velja

$$\frac{x_{r+1}-\sqrt{a}}{x_r-\sqrt{a}} = \frac{(x_r-\sqrt{a})^2}{3x_r^2+a}.$$

Za $0 < x_0 < \sqrt{a}$ lahko ocenimo

$$|\frac{x_0-\sqrt{a}}{\sqrt{3x_0^2+a}}| < \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = 1.$$

Za $x_0 \geq \sqrt{a}$ pišimo $x_0 = \sqrt{a} + y_0$ in izračunajmo

$$|\frac{x_0-\sqrt{a}}{\sqrt{3x_0^2+a}}| = \left|\frac{y_0}{\sqrt{4a+3y_0^2+6\sqrt{a}y_0}}\right| < \frac{y_0}{\sqrt{3y_0^2}} = 1/\sqrt{3} < 1.$$

Tako ugotovimo, da ostanki po absolutni vrednosti strogo padajo proti 0. ■

Naloga 5.5 (Vaje) *Določi vse polinome četrte stopnje z vodilnim koeficientom 1, pri katerih se tangentna metoda veda takole:*

- *v bližini α ima linearno konvergenco,*
- *v bližini $-\alpha$ ima kubično konvergenco.*

Določi še preostale ničle polinoma in red konvergence v njihovi bližini.

Rešitev. Spomnimo se, da je v bližini enostavnega korena konvergenca vsaj kvadratična. Če je prvi odvod enak 0, je konvergenca kubična. V primeru večkratne ničle je konvergenca linearna. Iz tega ugotovimo, da je α vsaj dvakratna ničla in $-\alpha$ enostavna ničla. Polinom je oblike $p(x) = (x+\alpha)(x-\alpha)^2(x-d)$, kjer je d neznana ničla. Uporabimo formulo

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) g^{(n-i)}(x).$$

Dobimo

$$p''(x) = 2(x-\alpha)^2 + 4(x-\alpha)(x-d) + 4(x+\alpha)(x-d) + (x-\alpha)(x+\alpha).$$

Če hočemo, da bo konvergenca kubična, mora veljati $p''(-\alpha) = 0$. Vstavimo $-\alpha$:

$$p''(-\alpha) = 2(-\alpha-\alpha)^2 + 4(-\alpha-\alpha)(-\alpha-d) + 0 + 0 = 8\alpha(\alpha+\alpha+d) = 0,$$

iz česar dobimo $d = -2\alpha$. Ničla -2α je enostavna, konvergenca je vsaj kvadratična. Izračunajmo še vrednost drugega odvoda v -2α:

$$p''(-2\alpha) = 2(-2\alpha-\alpha)^2 + 0 + 0 + (-2\alpha+\alpha)(-2\alpha-\alpha) = 30\alpha^2 \neq 0.$$

Konvergenca v -2α je kvadratična. ∎

Naloga 5.6 (Vaje) *Nastavi Newtonovo metodo za reševanje sistema:*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^3 - 3xy^2 + 1 = 0, \\ f_2(x,y) &= 3x^2y - y^3 = 0. \end{aligned}$$

Velja $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$. *Izračunajmo*

$$JF = \begin{bmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Na vsakem koraku rešimo:

$$\begin{bmatrix} 3x_r^2 - 3y_r^2 & -6x_ry_r \\ 6x_ry_r & 3x_r^2 - 3y_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x_r^3 - 3x_ry_r^2 + 1 \\ 3x_r^2y_r - y_r^3 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo $x_{r+1} = x_r + \Delta x_r$ in $y_{r+1} = y_r + \Delta y_r$. To ponavljamo za $r = 0, 1, \ldots$ ∎