Poglavje 10

Numerična aproksimacija

Naloga 10.1 *Pokaži, da prostori zveznih funkcij niso strogo normirani za neskončno normo. Oglejmo si $\mathcal{C}([0,1])$ in funkcijo*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

in $g(x) = 1 - x$.

Rešitev. Izračunajmo še:

$$g(x) = f(1-x) \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Tako velja:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 1, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{3}{2}x, & 1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Očitno velja

$$||f+g|| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) + g(x)| = 1 = \overbrace{\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|}^{\frac{1}{2}} + \overbrace{\max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)|}^{\frac{1}{2}} = 1$$

Funkcija f očitno ni večkratnik funkcije g. ∎

Naloga 10.2 *Vektorski prostor $X = \mathbb{R}^3$ je opremljen z neskončno normo. Podan je vektor $f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ in iščemo element najboljše aproksimacije v prostoru $\mathcal{L}\left(\{(1,0,0),(0,1,0)\}\right)$.*

(i). Ali je prostor strogo normiran.

(ii). Ali za f obstaja enoličen element najboljše aproksimacije?

Rešitev.

(i). Prostor ni strogo normiran, saj bi to zagotavljalo enoličnost elementa najboljše aproksimacije.

(ii). Za f ne obstaja enoličen element najboljše aproksimacije. Oglejmo si vektorja $g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ in $g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$. Očitno velja $||f - g_1||_\infty = ||f - g_2||_\infty = 2$.

∎

Naloga 10.3 *Danih je n točk v ravnini. Poišči premico, ki po metodi najmanjših kvadratov aproksimira točke. Preveri formulo za točke* $(1,2),(2,3),(3,5),(4,8)$.

Rešitev. Zapišimo ciljno funkcijo

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

. Iščemo za katera a in b je dosežen minimum.

Izračunajmo parcialna odvoda in rešimo sistem

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}x_i(ax_i+b-y_i)=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0$$

Iz česar dobimo linearni sistem

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i\\ \sum_{i=1}^n x_i & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_iy_i\\ \sum_{i=1}^n y_i\end{bmatrix}$$

∎

Naloga 10.4 *Dan je interval* $[-1,1]$ *in funkcija* $f(x)=e^x$. *Poišči premico, ki f najbolje aproksimira po zvezni metodi najmanjših kvadratov. Torej v normi, ki jo porodi skalarni produkt:*

$$<f,g>:=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx.$$

Rešitev. Minimizirati moramo

$$H(a,b)=\int_{-1}^{1}(e^x-ax-b)^2.$$

Velja

$$\frac{\partial H}{\partial a}=\int_{-1}^{1}2(e^x-ax-b)(-x)dx\rightarrow\quad x-e^x-a\frac{x^3}{3}-b\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=\quad e+e^{-1}-e+e^{-1}-a\frac{2}{3}=0$$
$$\frac{\partial H}{\partial b}=\int_{-1}^{1}2(e^x-ax-b)(-1)dx\rightarrow\quad e^x-a\frac{x^2}{2}-bx\Big|_{-1}^{1}=\quad e-e^{-1}-2b=\quad 0$$

∎

Iz česar dobimo $a=\frac{3}{e}$ in $b=\frac{-1+e^2}{2e}$.

Naloga 10.5 *Podan je prostor funkcij z diskretnim skalarnim produktom*

$$<f,g>:=f(1)g(1)+2f(2)g(2)+2f(3)g(3)+2f(4)g(4)+f(5)g(5)$$

Poišči prve tri ortogonalne polinome z uporabo Gramm-Schmidtove ortogonalizacije. Preizkusi še rekurzivno tričleno rekurzijo za izračun ortogonalne baze. Aproksimiraj funkcijo $f(x)=2\cos^2(\frac{\pi x}{4})$ *po metodi najmanjših kvadratov s parabolo.*

Rešitev. Začnemo z bazo prostora $1, x, x^2$. Izračunamo $< 1, 1 >= 8$. Kar pomeni, da po normiranju dobimo $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Izračunamo $< \frac{1}{\sqrt{8}}, x >= 6\sqrt{2}$. Odštejemo projekcijo na prvi vektor $h_2(x) = x - 6\sqrt{2}/\sqrt{8} = x - 3$. Dobljeno moramo še normirati, tako dobimo $< h_2, h_2 >= 12$ in $f_2(x) = h_2(x)/\sqrt{12} = \frac{x-3}{\sqrt{12}}$.

Izračunamo še $< f_1, x^2 >= 21\sqrt{2}$ in $< f_2, x^2 >= 12\sqrt{3}$ in tako dobimo

$$h_3(x) = x^2 - 21\sqrt{2}f_1(x) - 12\sqrt{3}f_2(x) = x^2 - 6x + \frac{15}{2}.$$

Izračunamo še $< h_3, h_3 >= 18$ in tako dobimo $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{18}}(x^2 - 6x + \frac{15}{2})$.

Najboljša aproksimacija za funkcija $f(x)$ je torej ravno ortogonalna projekcija na prostor razpet z $1, x, x^2$. Ker poznamo njegovo ortogonalno bazo, je potrebno izračunati le skalarne produkte $< f, f_1 >$, $< f, f_2 >$ in $< f, f_3 >$. ■