Poglavje 4

Numerična stabilnost

Algoritem je **direktno stabilen**, če vrne rezultat, ki se malo razlikuje od prave vrednosti. Ponavadi preverjamo relativno direktno stabilnost. Direktna absolutna in relativna napaka sta

$$|y - \widehat{y}| \text{ in } \frac{|y - \widehat{y}|}{|y|}.$$

Algoritem je **obratno stabilen**, če za izračunan rezultat obstajajo taki malo zmoteni podatki, da iz njih s točnim izračunom dobimo izračunano vrednost. Obratna absolutna napaka je najmanjši $|\Delta x|$, tako da velja $f(x + \Delta x) = \widehat{y}$. Obratna relativna napaka je $\frac{|\Delta x|}{|x|}$.

Pri obratni napaki je izračunana vrednost enaka $\widehat{y} = f(\widehat{x})$. Če je funkcija f *zvezno odvedljiva* v x, potem velja

$$|\widehat{y} - f(x)| = |f(\widehat{x}) - f(x)| \leq |f'(x)||\widehat{x} - x|.$$

Če f ni absolutno občutljiva, bo pri majhnih vrednostih $\Delta x = |\widehat{x} - x|$ napaka absolutno obratno stabilne metode majhna in metoda bo absolutno direktno stabilna. Podobno velja za relativno stabilnost in relativne napake. Več ste povedali na predavanjih.

Naloga 4.1 (Vaje) *Vrednost $z = x^2 - y^2$ računamo na dva načina:*

(i). $z = x^2 - y^2$

(ii). $z = (x - y)(x + y)$

Analiziraj algoritma. Oceni relativno napako $\frac{|\widehat{z}-z|}{|z|}$. Ali je kateri od obeh algoritmov direktno/obratno stabilen?

Rešitev.

(i). Imamo $z = x * x - y * y$, $\widehat{a} = x * x(1 + \alpha)$, $\widehat{b} = y * y(1 + \beta)$, $\widehat{z} = (\widehat{a} - \widehat{b})(1 + \gamma)$, kjer je $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq u$, u je relativna natančnost. Sledi, da je

$$\widehat{z} = x^2 \overbrace{(1 + \alpha)(1 + \gamma)}^{(1+\delta_1)} - y^2 \overbrace{(1 + \beta)(1 + \gamma)}^{(1+\delta_2)}.$$

Iz ocene $1 - 2u + u^2 = (1 - u)^2 \leq (1 + \delta_1) \leq (1 + u)^2 = 1 + 2u + u^2$, pri majhnem u dobimo $\delta_1, \delta_2 \leq 2 * u$. Ocenimo izraz

$$|\widehat{z} - z| = |x^2\delta_1 - y^2\delta_2| \leq x^2|\delta_1| + y^2|\delta_2| \leq 2u(x^2 + y^2).$$

Torej velja ocena:

$$\frac{|\widehat{z} - z|}{|z|} \leq 2u\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

Ocena je smiselna. Najlažje to vidimo tako, da izberemo $\delta_1 = u$, $\delta_2 = -u$. Iz tega vidimo, da ta algoritem ni direktno stabilen, saj lahko pri x in y, ki sta si blizu, dobimo veliko napako. Algoritem je obratno stabilen. Če definiramo $\widehat{x} = x\sqrt{(1 + \delta_1)}$ in $\widehat{y} = y\sqrt{(1 + \delta_2)}$, ki sta blizu x in y, ter predpostavimo, da je računanje točno, dobimo zmoten izraz $\widehat{z} = \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2$.

(ii). Oglejmo si še $z = (x - y)(x + y)$. Definirajmo $\widehat{a} = (x - y)(1 + \alpha)$, $\widehat{b} = (x + y)(1 + \beta)$ ter $\widehat{z} = \widehat{a}\widehat{b}(1 + \gamma)$, kjer je $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq u$. Izraz je enak

$$\widehat{z} = (x - y)(x + y)\overbrace{(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma)}^{(1+\delta)},$$

kjer s podobno oceno kot v prejšnji točki dobimo $|\delta| \leq 3u$. Torej velja ocena $|\widehat{z} - z| \leq 3u|z|$. Na koncu dobimo $\frac{|\widehat{z}-z|}{|z|} \leq 3u$. Algoritem je direktno stabilen. Prav tako je obratno stabilen, iskana zmotena x in y sta recimo: $\widehat{x} = x\sqrt{(1 + \delta)}$, $\widehat{y} = y\sqrt{(1 + \delta)}$.

■