Poglavje 11

Polinomska interpolacija

Polinom $\mathcal{L}_{n,i}(x) = \Pi_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ je Lagrangeev bazni polinom. Naj bo $I_n(x)$ polinom, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, \ldots, x_n$. Potem je to ravno polinom

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_{n,i}(x).$$

Če definiramo $\omega(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$, lahko zapišemo

$$\mathcal{L}_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

Za ostanek $n + 1$-krat odvedljive funkcije na $[a, b]$, velja

$$f(x) - I_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n + 1)!}\omega(x),$$

za nek $\zeta \in [a, b]$. Veljati mora, da je $x_i \in [a, b]$.

Naloga 11.1 *Dokaži, da velja* $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_{n,i}(x) = 1$.

Rešitev. Če za f vzamemo kar konstanto 1, iz enačbe za ostanek dobimo željeno enakost. Odvod konstante je enak 0. ∎

Lagrangeva oblika interpolacijskega polinoma ni najprimernejša za konstrukcijo in računanje vrednosti interpolacijskega polinoma. Porabimo namreč veliko število operacij, poleg tega mora biti stopnja polinoma vnaprej določena. Boljše so zaporedne linerne interpolacije in tudi deljene in končne diference.

Nevilleova shema

Naj bo $I_{i,\ldots,i+k}$ interpolacijski polinom, ki se ujema z f v točkah $x_i, \ldots, x_{i+k}$. Potem velja

$$I_{i,\ldots,i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & I_{i,\ldots,i+k-1}(x) \\ x - x_{i+k} & I_{i+1,\ldots,i+k}(x) \end{vmatrix}.$$

Primer Nevillove sheme za 4 točke:

$$\begin{array}{c|c|c|ccc}
x_i & x - x_i & y_i & & & \\
\hline
x_0 & x - x_0 & y_0 & & & \\
 & & & I_{0,1} & & \\
x_1 & x - x_1 & y_1 & & I_{012} & \\
 & & & I_{1,2} & & I_{0123} \\
x_2 & x - x_2 & y_2 & & I_{123} & \\
 & & & I_{2,3} & & \\
x_3 & x - x_3 & y_3 & & &
\end{array}.$$

Naloga 11.2 *Poišči vrednosti interpolacijskega polinoma v točki $x = 1$ za podatke $x_0 = 3, x_1 = 2, x_2 = 5$ in $f(x_0) = 2, f(x_1) = 4, f(x_2) = 0$.*

Rešitev.

$$\begin{array}{c|c|c|cc}
x_i & x - x_i & y_i & & \\ \hline
x_0 = 3 & x - x_0 = -2 & y_0 = 2 & & \\
 & & & I_{0,1} = 6 & \\
x_1 = 2 & x - x_1 = -1 & y_1 = 4 & & I_{012} = \frac{20}{3} \\
 & & & I_{1,2} = \frac{16}{3} & \\
x_2 = 5 & x - x_2 = -4 & y_2 = 0 & &
\end{array}.$$

Do vrednosti smo prišči z naslednjim postopkom

$$I_{01}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} x - x_0 & I_0(x) \\ x - x_1 & I_1(x) \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$I_{12}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} x - x_1 & I_1(x) \\ x - x_2 & I_2(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{3},$$

$$I_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} x - x_0 & I_{01}(x) \\ x - x_2 & I_{12}(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -4 & \frac{16}{3} \end{vmatrix} = \frac{20}{3}.$$

■

Deljene diference

Deljena diferenca $[\mathbf{x_0}, \ldots, \mathbf{x_k}]\mathbf{f}$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se ujema z f v paroma različnih točkah $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Velja še

$$I_n(x) = [x_0]f + \sum_{i=1}^{n}(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})[x_0, x_1, \ldots, x_i].$$

Za k-krat zvezno odvedljivo funkcijo velja

$$[x_0, x_1, \ldots, x_k]f = \frac{1}{k!}f^{(k)}(\zeta).$$

Za $n + 1$-krat odvedljivo funkcijo f velja

$$f(x) - I_n(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f.$$

Vrednosti deljenih diferenc najlažje izračunamo s pomočjo rekurzivne formule:

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & \text{za } x_i = \ldots = x_{i+k} \\ \frac{[x_i,\ldots,x_{r-1},x_{r+1},\ldots,x_{i+k}]f - [x_i,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_{i+k}]f}{x_s - x_r} & \text{za } x_s \neq x_r. \end{cases}$$

Naloga 11.3 *Naj bo f C^1-funkcija in naj bodo $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Poišči polinom p stopnje $2n+1$, ki se bo z dano funkcijo f ujemal dvakratno, to je v vrednostih in odvodih. Poišči polinom $H_n(x)$, tako da bo veljalo $H_n(x_i) = f(x_i)$ in $H_n'(x_i) = f(x_i)$. Poleg tega naj velja $A_i(x_j) = \delta_{ij}$, $A_i'(x_j) = 0$, $B_i(x_j) = 0$ in $B_i'(x_j) = \delta_{ij}$. Polinoma poizkusi poiskati sam. Če ti ne uspe, lahko dokažeš, da temu zadoščata kar nastavka*

$$A_i(x) = \left(1 - 2\mathcal{L}_{in}'(x_i)(x - x_i)\right)\mathcal{L}_{in}^2(x)$$

in

$$B_i(x) = (x - x_i)\mathcal{L}_{in}^2.$$

Rešitev. Očitno velja $B_i(x_j) = 0$, saj je $\mathcal{L}_{in}(x_j) = \delta_{ij}$. Izračunajmo

$$B_i'(x) = \mathcal{L}_{in}^2(x) + 2(x - x_j)\mathcal{L}_{in}(x)\mathcal{L}_{in}'(x).$$

Torej velja $B_i'(x_j) = \delta_{ij}^2 = \delta_{ij}$. Velja tudi

$$A_i(x_j) = (1 - 2\mathcal{L}_{in}'(x_i)(x_j - x_i))\mathcal{L}_{in}^2(x_j) = ((1 - 2\mathcal{L}_{in}'(x_j)\delta_{ij}(x_j - x_i))\delta_{ij}^2 = \delta_{ij}.$$

Izračunajmo še

$$A_i'(x) = -2\mathcal{L}_{in}'(x_i)\mathcal{L}_{in}^2(x) + (1 - 2\mathcal{L}_{in}'(x_i)(x - x_i))2\mathcal{L}_{in}(x)\mathcal{L}_{in}'(x).$$

Torej je $A_i'(x_j) = 0$ za $i \neq j$, saj je $\mathcal{L}_{in}(x_j) = 0$. Za $j = i$ dobimo

$$A'(x_i) = -2\mathcal{L}_{in}'(x_i) + 2\mathcal{L}_{in}'(x_i) = 0.$$

■

Naloga 11.4 *Dana je funkcija* $f(x) = \frac{4}{1+x}$.

(i). Preko deljenih diferenc poišči interpolacijski polinom stopnje 5, *za katerega velja:*

$$p(0) = f(0), \quad p'(0) = f'(0), \quad p''(0) = f''(0), \quad p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1)$$

in $p''(1) = f''(1)$. *Izračunaj njegovo vrednost v* $x = \frac{1}{2}$.

(ii). Čimbolj oceni napako $\max|f(x) - p(x)|$ *za* $x \in [0, 1]$.

Rešitev. (i)
Izračunajmo

$$f(x) = \frac{4}{1+x}, \quad f'(x) = \frac{-4}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{8}{(1+x)^3}.$$

Tako dobimo

$$f(0) = 4,\ f'(0) = -4\ , f''(0) = 8,\ f(1) = 2,\ f'(1) = -1,\ f''(1) = 1.$$

Uporabimo Newtonovo obliko interpolacijskega polinima

$$p(x) = [x_0]f + \sum_{i=1}^{n}(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})[x_0, x_1, \ldots, x_i]f.$$

Upoštevamo, da velja $[x_0, x_0]f = \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}$, $[x_0, x_0, x_0]f = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}$. Izračunajmo deljene diference:

$$\begin{array}{c|cccccc}
\hline
\underline{0} & 4 & & & & & \\
 & & -4 & & & & \\
0 & 4 & & \underline{4} & & & \\
 & & -4 & & \underline{-2} & & \\
0 & 4 & & \underline{2} & & 1 & \\
 & & -2 & & -1 & & -\frac{1}{2} \\
\underline{1} & 2 & & 1 & & \frac{1}{2} & \\
 & & -1 & & -\frac{1}{2} & & \\
1 & 2 & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & -1 & & & & \\
1 & 2 & & & & &
\end{array}.$$

Tako dobimo interpolacijski polinom

$$p(x) = 4 + (-4x) + 4x^2 + (-2)x^3 + x^3(x-1) + (-\frac{1}{2}x^3(x-1)^2).$$

Vrednost polinoma izračunamo po Hornerju:

$$p(x) = 4 + x\left(-4 + x\left(4 + x\left(-2 + (x-1)\left(1 + (x-1) - \frac{1}{2}\right)\right)\right)\right).$$

Tako dobimo

$$p(\frac{1}{2}) = 4 + \frac{1}{2}(-4 + \frac{1}{2}(4 + \frac{1}{2}(-2 - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}))))) = \frac{171}{64}.$$

(ii)
Ocenimo še napako. Vemo, da velja

$$|f(x) - p(x)| = |x^3(x-1)^3[0,0,0,1,1,1,x]f| = |x^3(x-1)^3| \cdot |\frac{f^{(6)}(\zeta)}{6!}|.$$

Šesti odvod funkcije je enak

$$f^{(6)}(x) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (-1)^6}{(1+x)^7}.$$

Torej velja $f^{(6)}(\zeta) \leq 4 \cdot 6!$. Ocenimo še

$$|x^3(x-1)^3| = |x(x-1)|^3 \leq (\frac{1}{2}\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{4^3}.$$

Dobili smo oceno

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4^3}\frac{4 \cdot 6!}{6!} = \frac{1}{16}.$$

■

Naloga 11.5 *Izračunaj deljeno diferenco*

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n]\left(\frac{x}{1+x}\right),$$

kjer so točke različne, tj. $x_j \neq x_i$ za $i \neq j$.

Rešitev. Označimo $f(x) = \frac{x}{1+x}$, Nalogo rešimo z indukcijo. Najprej poglejmo, kaj dobimo za bazo indukcije in še en primer.

$$[x_0, x_1]f = \frac{[x_1]\frac{x}{1+x} - [x_0]\frac{x}{1+x}}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_0}{1+x_0}}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 + x_0x_1 - x_0 - x_0x_1}{(x_1 - x_0)(1+x_1)(1+x_0)}$$

$$= \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)}.$$

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_0, x_1]\frac{x}{1+x} - [x_1, x_2]\frac{x}{1+x}}{x_1 - x_3} = \frac{\frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)} - \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)}}{x_0 - x_2} =$$

$$\frac{1 + x_2 - 1 - x_0}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2))(x_0 - x_0)} = \frac{-1}{(1+x_0)(1+x_1)(1+x_2)}.$$

Naša indukcijska predpostavka bo torej

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]\frac{x}{1+x} = \frac{(-1)^n}{(1+x_0)(1+x_1)\dots(1+x_{n-1})}.$$

Tako dobimo

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]f - [x_1, \dots, x_n]f}{x_0 - x_n} =$$

$$\frac{(-1)^n \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)\dots(1+x_n)} - (-1)^n \frac{1}{(1+x_0)(1+x_1)\dots(1+x_n)}}{x_0 - x_n} =$$

$$\frac{(-1)^n(1 + x_n - 1 - x_0}{(1+x_0)(1+x_1)\dots(1+x_n)(x_0 - x_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x_0)(1+x_1)\dots(1+x_n)}.$$

∎

Naloga 11.6 *Izračunaj napako interpolacije za $f(x) = \sin(x)$ na $[0, \frac{\pi}{6}]$ s točkami $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}$ splošno in pri Hermitovi interpolaciji, kjer zahtevamo še ujemanje odvodov.*

Rešitev. Vemo, da velja

$$|f(x) - p_3(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x]f| =$$

$$|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!}|.$$

Pišimo še $h = \frac{\pi}{12}$. Tako velja $x_i = x_0 + i \cdot h$. Izračunati moramo $||x(x-h)(x-2h)||_\infty$ na $[0, \frac{\pi}{6}]$. Izračunajmo odvod

$$(x(x-h)(x-2h))' = x(x-h) + (x-h)(x-2h) + x(x-2h) =$$

$$3x^2 - 6hx + 2h^2 = 3(x-h)^2 - h^2.$$

Ničli sta torej $x_{1,2} = h(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$. Samo ena leži na našem intervalu. Makismum je torej

$$|(h + \frac{\sqrt{3}}{3}h)(\frac{\sqrt{3}}{3}h)(\frac{\sqrt{3}}{3} - h)| = |h^3\frac{\sqrt{3}}{3}(1 - \frac{1}{3})| = \frac{2}{9}\sqrt{3}h^3.$$

Torej je

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{2}{9}\sqrt{3}h^3\frac{f^{(3)}(\zeta)}{3!} = \frac{\sqrt{3}}{27}(\frac{\pi}{12})^3 \doteq 1.1510^{-3}.$$

V primeru Hermitove interpolacije dobimo

$$|f(x) - p_6(x)| = |(x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2)^2[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, x]f| =$$

$$|x^2(x-h)^2(x-2h)^2\frac{f^{(6)}(\zeta)}{3!}|.$$

Naredimo iste ocene kot prej in dobimo

$$|f(x) - p_6(x)| \leq (\frac{2}{9}\sqrt{3}h^3)^2\frac{f^{(6)}(\zeta)}{5!} = (\frac{\pi}{12})^8\frac{1}{9720} \doteq 3.3 \cdot 10^{-8}.$$

Upoštevamo še, da velja

$$||\sin^{(6)}||_{\infty,[0,\pi/6]} = \frac{1}{2}.$$

∎

Naloga 11.7 *Dane so točke* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *in ustrezne vrednosti* $y_i = f(x_i)$. *Kako bi izračunali* $f^{-1}(y)$ *v dani točki* y*? Funkcija* f *mora biti monotona.*

1. možnost
Skozi točke (x_i, y_i) napeljemo interpolacijski polinom $p(x)$. Približek x za $f^{(-1)}(y)$ dobimo kot rešitev enačbe $p(x) = y$.
2. možnost
Zamenjamo vlogi x in y. Skozi točke (y_i, x_i) napeljemo interpolacijski polinom $p(y)$. Primera z enakimi y nimamo zaradi monotonosti. Približek x za $f^{-1}(y)$ dobimo kot vrednost $p(y)$ v točki y. Ta postopek ponavljamo iterativno. Če poznamo funkcijo f, potem za približek x izračunamo $f(x)$ in točko $(x, f(x))$ zamenjamo z najbolj oddaljeno točko (x_i, y_i) gledano po y. Red konvergence je vedno med 1 in 2. Ko gre $n \to \infty$, gre red proti 2.

Naloga 11.8 *Naredi dva koraka inverzne interpolacije za izračun* $\arcsin(\frac{1}{3})$, *kjer so dane točke* $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Rešitev. 1. korak
Za ta primer je $f(x) = \sin(x)$. Izračunamo še $\sin(0) = 0, \sin(\pi/6) = 1/2, \sin(\pi/2) = 1$. Torej imamo $x_0 = 0, y_0 = 0, x_1 = \pi/6, y_1 = 1/2, x_2 = \pi/2, y_2 = 1$. V prvem koraku zamenjamo vlogi x in y in izračunamo interpolacijski polinom v y in izračunamo $p(1/3)$.
2. korak
Pogledamo vrednost $f(x_3)$ in odvržemo najbolj oddaljeno točko po koordinati y. ∎