Poglavje 7

Reševanje linearnih sistemov

Pogojenostno število matrike, $\text{cond}(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$ nam pove kako občutljivo je reševanje sistema. Da lahko dobimo poljubno občutljive matrike v praksi, pokaže naslednja naloga.

Naloga 7.1 *Iščemo koeficiente polinoma $p(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, ki na $[0, 1]$ aproksimira zvezno funkcijo f tako, da je napaka*

$$E = \int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$$

minimalna. Torej mora veljati $\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0$ za $i = 1, \ldots, n$, kjer je

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 2\int_0^1 (p(x) - f(x))x^{i-1} dx.$$

Definirajmo vektor

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \qquad \textit{in;} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Od tod dobimo

$$F_i = \int_0^1 f(x)x^{i-1}dx = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1}x^{i-1}\right) dx = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 x^{i+j-2}dx = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{i+j-1}.$$

Dobimo sistem s Hilbertovo matriko H_n, $H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$. Kar je sistem $Ha = F$. Primer za $n = 5$ je

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Hilbertove matrike so primer zelo občutljivih matrik. Pogojenostno število H_5 je recimo približno $4.766 \cdot 10^5$, kar lahko izračunamo z ukazom cond v Matlabu. Pogojenostna števila matrik H_n hitro rastejo.

Izkaže se, da smo dobili občutljiv sistem, ker smo vzeli standardno bazo polinomov stopnje n. Za stabilno računanje moramo vzeti ortogonalno bazo polinomov.

Izrek 7.1 *Naslednji trditvi sta ekvivalentni*

(i). Obstaja enolični razcep $A = LU$, kjer je L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali, U pa nesingularna zgornje trikotna matrika.

(ii). Vse vodilne podmatrike $A(1:k, 1:k)$ so nesingularne.

Algoritem 1: LU razcep brez pivotiranja

for $j = 1, \ldots, n-1$ **do**
  for $i = 1, \ldots, n$ **do**
    $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$;
    for $k = j+1, \ldots, n$ **do**
      $a_{ik} = a_{ik} - l_{ij}a_{jk}$;
    end
  end
end
Število operacij je $\frac{2}{3}n^2 + O(n^2)$.

Izrek 7.2 *Če je A nesingularna, potem obstaja taka permutacijska matrika P, da obstaja LU razcep $PA = LU$.*

Algoritem 2: LU razcep z delnim pivotiranja

$L = 0$;
$P = I$;
for $j = 1, \ldots, n-1$ **do**
  Poišči $|a_{qj}| = \max_{j \leq p \leq n} |a_{pj}|$;
  Zamenjaj vrstici q in j v L, A in P;
  for $i = j, \ldots, n$ **do**
    $l_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$;
    for $k = j+1, \ldots, n$ **do**
      $a_{ik} = a_{ik} - l_{ij}a_{jk}$;
    end
  end
end
Število operacij je $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$.

Naloga 7.2 *Z LU-razcepom brez pivotiranja reši sistem $Ax = b$, kjer je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Zapiši matriki L, U in vektor y, ki ga dobiš pri računanju.

Rešitev.
Lotimo se Gaussove eliminacije:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = L.$$

Izračunamo lahko tudi v bolj kompaktni obliki. Zgornji trikotnik končne matrike vsebuje matriko U, spodnji trikotnik brez diagonale pa matriko L brez diagonale. Upoštevamo, da ima matrika L na diagonali enice.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -11 & 13 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

zgornji trikotnik je U, spodnji trikotnik brez diagonale je matrika L brez diagonale.

Rešimo sistem $Ax = b$, $L(Ux) = b$, $y = Ux$.

Algoritem 3: Prema substitucija, $Ly = b$

for $i = 1, 2, \ldots, n$ **do**
  $y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k$;
end

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 38 \\ -16 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} y_1 &= -11 \\ y_2 &= 38 + 3 \cdot (-11) = 5 \\ y_3 &= -16 - 2 \cdot (-11) - 35 = -9 \end{aligned}$$

Algoritem 4: Obratna substitucija, $Ux = y$

for $i = n, n-1, \ldots, 1$ **do**
  $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k\right)$;
end

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= \tfrac{-1}{2}(5 - 3) = -1 \\ x_1 &= \tfrac{1}{2}(-11 + 3 + 12) = 2 \end{aligned}.$$

Torej dobimo $x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$. ■

Naloga 7.3 *Sestavi učinkovit algoritem za reševanje sistema linearnih enačb*

$$\begin{bmatrix} U & -I \\ B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Matrika $B = LU$ je nesingularna matrika in ima podan LU razcep. Preštej število množenj in deljenj.

Rešitev. Zmnožimo po blokih in dobimo

$$\begin{aligned} Ux - y &= a \\ L(Ux + y) &= b. \end{aligned}$$

Rešimo drugi sistem in dobimo vektor $z = Ux + y$, kar nas stane $n^2 + O(n)$ operacij. Označimo še $w = Ux - y$ in izrazimo $y = \frac{1}{2}(z - w) = \frac{1}{2}(z - a)$. Za izračun y porabimo $O(n)$ operacij. Na koncu rešimo še sistem $Ux = a + y$, za kar porabimo $n^2 + O(n)$ operacij. Skupaj smo porabili $2n^2 + O(n)$ operacij. ■

Naloga 7.4 *Za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

naredi:

(i). LU razcep z delnim pivotiranjem,

(ii). LU razcep s kompletnim pivotiranjem.

Rešitev. (i)Algoritem poteka takole. V stolpcu i poiščemo največji element, izmed a_{ji}, $j \geq i$ po absolutni vrednostni. Vrstico največjega elementa in i-to vrstico zamenjamo v L, A in P. Normalno nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo. Na koncu velja $PA = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \underline{6} & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1/2} & -5/2 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

(ii)Algoritem poteka takole. V podmatriki $A(i:n, i:n)$ poiščemo največji element po absolutni vrednostni, recimo da je to a_{kl}. Da ta element spravimo na mesto (i,i) zamenjamo i-to vrstico in k-to vrstico ter i-ti stolpec in k-ti stolpec. To naredimo tudi za matriko L. V P menjamo samo vrstice, v Q pa samo stolpce. Normalno nadaljujemo z Gaussovo eliminacijo. Na koncu velja $PAQ = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & \underline{7} \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3, 1\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \underline{\frac{15}{7}} \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3, 2\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{15}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3, 1\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3, 2\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{G}{\to} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 1/7 & -2/5 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\updownarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{1\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{2\leftrightarrow 3}{\to} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

∎

Naloga 7.5 *Matrika A je tridiagonalna,*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & b_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

- *Kakšna je oblika matrik L in U v LU razcepu brez pivotiranja (s pivotiranjem)?*
- *Pivotna rast matrike je $R = \frac{b}{a}$, kjer je*

  $$a = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}| \text{ in } b = \max_{1 \le i,j \le n} b_{ij}.$$

  Gledamo koliko se lahko poveča največji element v matriki. Dokaži, da je pri delnem pivotiranju za tridiagonalne matrike $R \le 2$.
- *Sestavi učinkovit algoritem za izračun LU razcepa tridiagonalne matrike brez pivotiranja (s pivotiranjem).*

Rešitev.

- Oblika matrik je naslednja:

  $$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & l_n \end{bmatrix} \text{ in } U = \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & u_n \end{bmatrix}$$

- Najprej poglejmo, kaj se zgodi s prvima dvema vrsticama. Tako bomo dobili bazo indukcije. Poglejmo si prve tri stolpce prvih dveh vrstic:

  $$\begin{matrix} a_1 & c_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 \end{matrix}.$$

  Imamo dve možnosti. Prva je, da ne pivotiramo, torej velja $|a_1| \ge |b_1|$ in zato je $\frac{|b_1|}{|a_1|} \le 1$. Tako dobimo

  $$\begin{matrix} a_1 & c_1 & 0 \\ 0 & a_2 - \frac{b_1}{a_1} c_1 & c_2 \end{matrix}.$$

  Druga možnost je, da pivotiramo. Ko zamenjamo vrstici, dobimo

  $$\begin{matrix} b_1 & a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 & 0 \end{matrix}.$$

  Po koraku s pivotiranjem dobimo

  $$\begin{matrix} b_1 & a_2 & c_2 \\ 0 & c_1 - \frac{a_1}{b_1} a_2 & -c_2 \frac{a_1}{b_1} \end{matrix}.$$

  Podobno kot prej velja $|b_1| < |a_1|$ in zato je $\frac{|a_1|}{|b_1|} < 1$. Dokažimo, da so diagonalni elementi manjši od $2a$, kjer je a največja absolutna vrednost elementov v matriki A. V prvem primeru velja

  $$|a_2 - \frac{b_1}{a_1} c_1| \le |a_2| + |\frac{b_1}{a_1}||c_1| \le 2a.$$

V drugem primeru velja

$$|c_1 - \frac{a_1}{b_1}a_2| \leq |c_1| + |\frac{a_1}{b_1}||a_2| < 2a.$$

Pokažima še, da so izvendiagonalni elementi manjši ali enaki a. V prvem primeru velja $|a_1| \leq a$ in $|c_2| \leq a$. V drugem primeru velja $0 \leq a$ in

$$| - c_2\frac{a_1}{b_1}| \leq |c_2||\frac{a_1}{b_1}| < a.$$

Naša indukcijska predpostavka je, da je v i-tem koraku v i-ti vrstici diagonalni element manjši od $2a$, izvendiagonalni element pa manjši od a. Imamo sledečo situacija za elemente

$$\begin{matrix} a_1^{(i)} & c_1^{(i)} & 0 \\ b_1^{(i+1)} & a_2^{(i+1)} & c_2^{(i+1)} \end{matrix},$$

kjer je $b_1^{(i+1)} = b_i$, $a_2^{(i+1)} = a_{i+1}$ in $c_2^{(i+1)} = c_{i+1}$. Poleg tega velja še $|a_1^{(i)}| \leq 2a$ in $c_1^{(i)} \leq a$. Naredimo analogen sklep kot za bazo indukcije in s tem dokaz končamo, saj potem velja $b \leq 2a$.

Algoritem s pivotiranjem je prepuščen za domačo nalogo.

■

Naloga 7.6 *Dana je nesingularna matrika A reda n skupaj z inverzno matriko A^{-1}. Zapiši algoritem za izračun inverzne matrike B^{-1}, ki je*

$$B = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix},$$

kjer je $u, v \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

Rešitev. Naj bo

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} C & x \\ y^t & \beta \end{bmatrix}.$$

Zmnožimo po bločnih komponentah in dobimo

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & x \\ y^t & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC + uy^T & Ax + \beta u \\ v^T C + \alpha y^T & v^T x + \alpha\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobimo sistem

$$AC + uy^T = I \tag{7.1}$$
$$Ax + \beta u = 0 \tag{7.2}$$
$$v^T C + \alpha y^T = 0 \tag{7.3}$$
$$v^T x + \alpha\beta = 1 \tag{7.4}$$

Iz prve enačbe izrazimo C in ga vstavimo v 3 in 4 enačbo. Dobimo $C = A^{-1} - \overbrace{A^{-1}u}^{z}y^T = A^{-1} - zy^T$ in $x = -\beta z$.

Ko vstavimo v tretjo enačbo dobimo

$$v^T(A^{-1} - zy^T) + \alpha y^T$$

in

$$v^T(-\beta z) + \alpha\beta = 1.$$

Iz zadnje zveze lahko takoj izrazimo

$$\beta = \frac{1}{\alpha - v^T z}.$$

Poglejmo še tretjo enačbo, sledi

$$v^T A^{-1} - v^T z y^T + \alpha y^T = v^T A^{-1} + y^T(\alpha - v^T z) = 0.$$

Tako je

$$y^T = \frac{v^T A^{-1}}{v^T z - \alpha}.$$

Napišimo še skico algoritma

(i). $z = A^{-1}u \qquad n \times (n*, n-1+) \to n^2*, n^2 - n + |2n^2 - n$;

(ii). $\beta = \frac{1}{\alpha - v^T z} \qquad (n*, n-1+, 1-, 1/)|2n+1$;

(iii). $x = -\beta z \qquad (n*, 1-)|n+1;$

(iv). $y = -\beta(v^T A^{-1})^T = -\beta(A^{-1})^T v \qquad |2n^2 - n + 1;$

(v). $C = A^{-1} - zy^T \qquad (n^2*, n^2-)|2n^2.$

Skupaj imamo $6n^2 + n + 3$ operacij.

■

Naloga 7.7 *Poišči razcep Choleskega za matriko*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 14 & -11 \\ 3 & 8 & -11 & 15 \end{bmatrix}.$$

Kaj to pomeni za matriko A?

Rešitev.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -2 & 8 \\ -2 & -2 & 14 & -11 \\ 3 & 8 & -11 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sqrt{1} = 1 \\ 2/1 \\ -2/1 \\ 3/1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{8 - 2^2} = 2 \\ -2 & 1/2(-2 - (-2 \cdot 2)) \\ 3 & 1/2(8 - (3 \cdot 2)) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & \sqrt{14 - (-2)^2 - 1^2} = 3 \\ 3 & 1 & 1/3(-11 - (3 \cdot -2 + 1 \cdot 1)) \end{bmatrix}$$

Algoritem 5: Razcep Choleskega – $A = V \cdot V^T,\ V = ?$

for $k = 1, \ldots, n$ **do**
  $v_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2}$;
  for $j = k+1, \ldots, n$ **do**
    $v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}} \left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} \cdot v_{ki} \right)$;
  end
end

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & \sqrt{15 - (3^2 + 1^2 + (-2)^2)} = 3 \end{bmatrix} = V.$$

Matrika A je simetrična in pozitivno definitna, saj se je razcep Choleskega izvedel. ■