Rešene naloge iz numeričnih metod

Gašper Jaklič Selena Praprotnik

Predgovor

Zbirka nalog, ki je pred vami, je nastala iz gradiva, ki sva ga pripravila pri izvajanju predmeta Numerične metode na NTF v letih 2009-2011 in na podlagi izkušenj, ki sva jih pridobila pri izvajanju raznovrstnih drugih predmetov. Ker dosedaj ni bilo primerne zbirke nalog iz numeričnih metod, so študenti pogrešali naloge, s katerimi bi si pomagali pri pripravah na kolokvije in izpite. To je posebej važno na študijskih smereh, kjer je matematičnih predmetov relativno malo.
Namen te zbirke je preprost. Obravnavana so osnovna področja numerične matematike, pri vsakem so na kratko ponovljeni osnovni teoretični rezultati, nato pa se začnejo naloge. Za razliko od podobnih zbirk ne napiševa samo idej reševanja in končnega rezultata, ampak rešitev detajlno razdelava. Tako lahko študent/ka nalogo reši samostojno, in nato primerja rešitvi korak za korakom. Nekaj nalog zahteva preizkus numeričnih metod z računalnikom. Tu sva se odločila za brezplačen program Octave, ki je kompatibilen z Matlabom. Programe, ki so nastali pri pisanju zbirke, lahko bralec/bralka najde na spletni strani zbirke, opisani pa so tudi v enem od zaključnih razdelkov.
Zbirka je namenjena predvsem študentom/študentkam, ki poslušajo predmete numerične matematike na smereh, kjer je matematike nekoliko manj, ter študentom praktične matematike. Poleg tega služi za utrditev osnovnih algoritmov numerične matematike tudi za študente matematike na univerzitetnih bolonjskih smereh.
Zahvaljujeva se kolegom, ki so podrobno pregledali zbirko in podali vrsto koristnih pripomb.

Ljubljana, september 2012

Selena Praprotnik in Gašper Jaklič

Kazalo

Poglavje 1

Predstavitev programa Octave

1.1 Namestitev programa in dokumentacija

Octave je odprtokodni program za numerično računanje. Več informacij o programu lahko najdete na njegovi domači strani `http://www.gnu.org/software/octave/`. Z domače strani sledite povezavi `Download`, s katere lahko prenesete datoteke, ki jih potrebujete za namestitev programa. Podprti so vsi standardni operacijski sistemi (Windows, MacOS, Unix). Na domači strani najdete tudi dokumentacijo. Več lahko preberete na `http://en.wikibooks.org/wiki/Octave_Programming_Tutorial`.

1.2 Osnove dela z Octaveom

Pomoč prikličemo z ukazom `help` oz. `help ime_funkcije`. Primer: `help eig`. Po zgodovini ukazov se premikamo s tipkama gor/dol.
Če se program izvaja predolgo časa (npr. če se zanka ne konča), lahko ustavimo izvajanje s kombinacijo `Ctrl+c`. Octave zapustimo z ukazom `exit` ali `quit`.
Za brisanje vrednosti spremenljivk uporabimo ukaz `clear all`. Če želimo izbrisati vrednost ene same spremenljivke, npr. `x`, uporabimo `clear('x')`. Ukaz `who` prikaže, katere spremenljivke smo že definirali.
Imena spremenljivk so lahko karkoli, morajo pa se začeti s črko. Enako velja za imena datotek, v katere shranimo programe. Imena ne smejo vsebovati presledkov. Prav tako se izogibamo uporabi šumnikov. Octave razlikuje med malimi in velikimi črkami. Nize vpisujemo med enojne narekovaje.
Natančnost izpisa določamo z ukazom `format`. Privzet način je `format short`, ki izpiše 5 decimalnih mest. Če želimo daljši izpis, lahko uporabimo `format long`, ki izpiše 16 decimalnih mest. Izpisujemo z ukazom `disp`.

1.2.1 Shranjevanje

Osnovno okolje v Octaveu je vmesnik, v katerega pišemo ukaze in ki prikaže rezultate izračunov. Znotraj vmesnika lahko shranimo le vrednosti spremenljivk, ne pa tudi zaporedja ukazov. Ukaz `save ime_datoteke` shrani vrednosti vseh spremenljivk v datoteko `ime_datoteke`. Datoteka, v katero shranjujemo, ima končnico `.mat`. Shranimo lahko tudi vrednosti le določenih spremenljivk. Če želimo shraniti vrednosti spremenljivk `x,y,z`, to storimo z ukazom `save ime_datoteke x y z`. Npr. `save test.mat x y z`. Ko naslednjič zaženemo Octave, vrednosti naložimo z ukazom `load ime_datoteke`. V danem primeru torej `load test.mat`. Z ukazom `save` shranimo samo rezultate izračunov v binarnem zapisu. Za uporabnika je običajno zanimivo zaporedje ukazov, s katerim smo prišli do rezultata. To zaporedje zapišemo v posebno tekstovno datoteko.
Programe in funkcije pišemo v datoteke s končnico `.m`. Take datoteke ločimo glede na uporabo na skriptne in funkcijske. Skriptne datoteke vsebujejo zaporedje ukazov, funkcijske pa definicije funkcij. Pozorni moramo biti na to, da se v Octaveu nahajamo v delovnem področju (mapi), v kateri se nahaja datoteka s programom. Če želimo zagnati program `program.m`, moramo biti v mapi, v kateri je shranjen, klic ukaza `program` pa bo zagnal ukaze v datoteki.

1.3 Matrike in vektorji

1.3.1 Vnos matrik in vektorjev

Osnovni objekti v Octaveu so matrike. Števila so 1×1 matrike, vektorji pa bodisi stolpci bodisi vrstice. Znotraj vrstice elemente ločujemo z vejico ali presledkom, v novo vrstico pa skočimo s podpičjem. Naključne matrike generiramo s pomočjo funkcije `rand`. Ukaz `rand(n)` generira kvadratno matriko dimenzije $\mathtt{n} \times \mathtt{n}$ z naključnimi elementi med 0 in 1. Podobno funkcija `rand(m,n)` generira naključno pravokotno matriko dimenzije $\mathtt{m} \times \mathtt{n}$ (m vrstic in n stolpcev). Kompleksna števila zapišemo kot `z = 4 + 3i`. Iz obstoječih vektorjev lahko sestavimo nove, npr. zaporedje ukazov `x0 = [6,7,8]`, `v = [3,4,5,x0]` vrne `[3,4,5,6,7,8]`. Če sestavljamo matriko, moramo paziti, da se dimenzije ujemajo.
Primeri:
`[0;1;2]` je stolpec
`[0,1,2]` je vrstica
`m = [0,1,2;3,4,5]` je 2×3 matrika, ki smo jo shranili v spremenljivko `m`
`rand(2,3)` je matrika naključnih števil med 0 in 1 velikosti 2×3

1.3.2 Zapis z dvopičjem

Če želimo zapisati vektor zaporednih števil, je to lahko zamudno, zato uporabimo zapis z dvopičjem. Izraz `1:5` predstavlja vrstični vektor `[1,2,3,4,5]`. Števila v tako generiranih seznamih niso nujno cela.

Primeri:

`1:5` je vrstica števil od 1 do 5, `[1,2,3,4,5]`

`0:2:10` je vrstica števil od 0 do 10, korak je 2, `[0,2,4,6,8,10]`

`5:-1:0` je vrstica števil od 5 do 0, korak je -1, `[5,4,3,2,1,0]`

`0:0.5:2` je vrstica števil od 0 do 2, korak je 0.5, `[0,0.5,1,1.5,2]`

1.3.3 Izpis elementov

Elementi vektorjev in matrik so indeksirani. Prvi element ima indeks 1. Če želimo izpisati element, ki ne obstaja, program javi napako. Indekse lahko zapišemo z dvopičjem ali z vektorjem željenih indeksov.

Primeri:

`v = [3,4,5,6,7,8]`

`v(4)` izpiše četrti element, `6`

`v(0)` ali `v(10)` javi napako

`v(2:4)` izpiše elemente od drugega do četrtega (oba vključena), `[4,5,6]`

`v(1:2:3)` izpiše prvi in tretji element, `[3,5]`

`v(3:end)` izpiše elemente od tretjega do zadnjega, `[5,6,7,8]`

`m = [0,1,2;4,5,6;7,8,9]`

`m(1:2,:)` izpiše prvi dve vrstici matrike `m`

`m(:,2:3)` izpiše drugi in tretji stolpec matrike

`m(:)` iz matrike naredi vektor (stolpec), tako da stolpce zaporedoma zloži v vektor

1.4 Operacije

Osnovne operacije so `+` (seštevanje), `-` (odštevanje), `*` (množenje), `^` (potenciranje), `'` (transponiranje), \ (levo deljenje) in `/` (desno deljenje). Če želimo, da operacija deluje po komponentah, pred operator zapišemo piko. Pozorni moramo biti na dimenzije. Operator `'` (transponiranje) pri matrikah s kompleksnimi koeficienti pomeni transponiranje in konjugiranje. Če želimo matriko le transponirati, uporabimo `.'`. Če napišemo `x = A \ b`, je `x` rešitev sistema `A*x = b`. Če izračunamo `x = b/A`, je `x` rešitev sistema `x*A = b`.

Primeri:

`v0 = [1,2,3]`
`v1 = [4,5,6]`
`v0 + 5` vsaki komponenti prišteje 5, `[6,7,8]`
`v0*v1` vrne napako
`v0.*v1` zmnoži istoležne komponente vektorjev, `[4,10,18]`
`m = [1 + 2i, 2 + 2i; 1 - i, -3i]`
`m'` vrne `[1 - 2i, 1 + i; 2 - 2i, 3i]`
`m.'` vrne `[1 + 2i, 1 - i; 2 + 2i, -3i]`

1.5 Vgrajene funkcije in konstante

Zapisan je seznam najbolj pogosto uporabljanih vgrajenih funkcij. V vsaki vrstici so naštete funkcije, ki so si vsebinsko podobne. Imena funkcij so logična glede na njihovo uporabo, za podrobnosti pa si pomagamo s funkcijo `help`. V zadnji vrstici so zapisane tudi vgrajene konstante.

```
conj(z), imag(z), real(z), abs(z)
max(v), min(v), sort(v), sum(v), size(v), length(v), abs(v)
sin(x), cos(x), tan(x), asin(x), acos(x), atan(x), exp(x),
log(x), sqrt(x), floor(x), ceil(x), round(x)
zeros(n), ones(n), eye(n), diag(v), rand(n)
inv(A), det(A), eig(A), rank(A), disp(x)
pi, Inf, true = 1, false = 0, i, j, eps, NaN
```

1.6 Pisanje programov

Programe lahko pišemo v poljubnem urejevalniku besedil. Vrstice, ki se začnejo z znakom %, nimajo vpliva na program. Uporabljamo jih za komentiranje programa. Programi naj bodo vedno (smiselno) komentirani, koda pa zamaknjena. Ime datoteke je enako imenu funkcije, končnica pa je .m.

Primer 1:

```
function y = sestej(a,b)
% sešteje dani števili
      y = a + b;
end
```

Ta program shranimo v datoteko z imenom `sestej.m`. Ko želimo funkcijo uporabiti, moramo paziti še, v kateri mapi se nahajamo.
V splošnem bodo funkcije oblike

```
function [izhodne_sprem] = ime_funkcije(vhodne_sprem)
      stavki, ki se izvedejo ...
```

```
end
```

Podpičje na koncu stavka pomeni, da se rezultat ukaza ne izpiše.

Primer 2:

```
function [v, r] = vsotaRazlika(x,y)
      v = x + y;
      r = x - y;
end
```

1.6.1 Pogojni stavki

Pogojne stavke uporabimo, kadar želimo, da se del programa izvede le, če je izpolnjen določen pogoj. Pogoje sestavimo s pomočjo relatorjev `<`, `>`, `<=`, `>=`, `==`, `~=`. Logični operatorji, ki služijo za povezovanje pogojev, so `&` ali `&&` (in), `|` ali `||` (ali), `~` (negacija). Rezultat relatorjev je matrika enic in ničel. Enica pomeni, da je pogoj izpolnjen (true), ničla pa, da ni (false).
Pogoj `A ~= B` je izpolnjen le, če se razlikujejo VSE komponente matrik. Če nas zanima, ali se razlikuje kakšna od komponent matrik, napišemo `any(any(A ~= B))`.

Primer:

Program naj za dano število `a` zapiše, ali je enomestno, dvomestno ali večmestno.

```
function mestno(a)
      if a < 10
           disp('enomestno')
      elseif a < 100
           disp('dvomestno')
      else
           disp('vecmestno')
      end
end
```

V splošnem je pogojni stavek oblike

```
if pogoj1
      stavki, ki se izvedejo, če je izpolnjen pogoj1
elseif pogoj2
      stavki, ki se izvedejo, če
      pogoj1 ni izpolnjen in
      je izpolnjen pogoj2
else
      stavki, ki se izvedejo, če
      noben od prejšnjih pogojev ni izpolnjen
end
```

Stavki `elseif` in `else` niso obvezni. Število `elseif` stavkov je lahko poljubno.

1.6.2 Zanka `for`

Zanko `for` uporabljamo, kadar vemo, kolikokrat želimo ponoviti določene stavke in za katere vrednosti spremenljivke jih želimo izvesti.
Primer 1:
Računamo $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(n-1)\text{ množenj}}$.

```
x=a;
for i = 2:n
   x=x*a;
end
```

V splošnem lahko namesto `2:n` pišemo poljuben vektor.
Primer 2:
Želimo n-krat izpisati število a.

```
function y = nKrat(a,n)
     y = a;
     for i = 2:n
          y = [y;a];
     end
end
```

Ta program ni najbolj učinkovit, saj je treba ob vsaki ponovitvi zanke povečati dimenzijo vektorja `y`. Popravimo!

```
function y = nKrat2(a,n)
     y = zeros(n,1);
     for i = 1:n
          y(i) = a;
     end
end
```

Načeloma se, če se le da, izognemo uporabi zank. Octave namreč najbolje deluje pri operacijah z vektorji. Če malo pomislimo, najdemo elegantnejšo rešitev.

```
function y = nKrat3(a,n)
     y = a*ones(n,1);
end
```

1.6.3 Zanka `while`

Zanka `while` je oblike

```
while pogoj
      stavki, ki se izvedejo, če je pogoj izpolnjen
end
```

in se izvaja, dokler je pogoj izpolnjen.

Primer:

Izpisati želimo vse potence števila 2, ki so manjše od 1000.

```
x = 1;
while x < 1000
      disp(x);
      x = x*2;
end
```

Pozorni bodimo, da se morajo spremenljivke iz pogoja spreminjati znotraj zanke. Če na to pozabimo, se program "zacikla".

1.6.4 Stavka `break` in `continue`

Stavka `break` in `continue` uporabljamo, kadar želimo predčasno prekiniti izvajanje zanke. Stavek `break` prekine izvajanje zanke in izvajanje programa se nadaljuje po zanki. Stavek `continue` prekine izvajanje zanke in program nadaljuje na njenem začetku.

Primer:

```
x = 1;
while true
      disp(x);
      x = x+1;
      if x > 3
           break;
      end
end
disp(x);
```

Poskusite, kaj se zgodi, če namesto ukaza `break` uporabite ukaz `continue`.

1.6.5 Interaktivni vnos podatkov

Če želimo, da bi namesto klica funkcije, vrednosti parametrov vpisoval uporabnik, uporabimo ukaz `input`. Primer:

```
a = input('Vpisi stevilo...  ')
```

1.7 Grafika

Ukaz za risanje grafov je `plot`. Če imamo dva vektorja `x` in `y` iste dolžine in kličemo ukaz `plot(x,y)`, se odpre grafično okno, v katerem se nariše graf skozi točke (x_i, y_i).

Primer 1:

```
x = linspace(-pi, pi, 100);
y = sin(x);
plot(x,y);
```

Krivulje lahko rišemo tudi parametrično.

Primer 2:

```
t = 0:.001:2*pi;
x = cos(3*t);
y = sin(2*t);
plot(x,y)
```

Grafe lahko opremimo z naslovom, imeni osi, besedili… Uporabimo `title, xlabel, ylabel, legend, axis`. Na isti graf lahko narišemo tudi več krivulj.

Primer 3:

```
x =0:.01:2*pi;
y1 = sin(x);
y2 = sin(2*x);
plot(x,y1,x,y2)
```

Lahko pa sestavimo matriko stolpcev Y,

```
x = 0:.01:2*pi;
Y = [sin(x)', sin(2*x)', sin(4*x)'];
plot(x,Y)
```

1.8 Naloge

Vsako nalogo v tem poglavju je mogoče rešiti na več načinov, rešitve podajajo le eno od možnosti. Programe lahko najdete tudi na spletni strani [1].

1. S čim manj ukazi sestavite naslednje matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & -2 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 2i & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

```
% Naloga1.m
clear all
a = diag([4,-2,2i,0]-9) + ones(4)*9
b = [ones(3), zeros(3,2); zeros(2,3), 4*eye(2)]
c = zeros(5);
c(1,:) = ones(1,5) * 2;
c(:,1) = ones(5,1) * 2;
c(3:4,3:4) = 7*ones(2);
c(5,5) = 10;
c
```

2. V Octave vnesite naslednje matrike:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1+i & 1 & 1-i \\ 2i & 1-3i & 1 \\ 4-i & 1+2i & i \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & 2A_1 \end{bmatrix}.$$

Izpišite tretjo vrstico in prvi stolpec matrike A_1. V matriki A_3 vse ničle v spodnjem levem kotu spremenite v 2. Izračunajte determinanto in lastne vrednosti nove matrike A_3. Poiščite maksimalni element po absolutni vrednosti v matriki A_2. Naj bo x drugi, y pa tretji stolpec matrike A_2. Izračunajte skalarni produkt vektorjev x in y.

Rešitev.

```
% Naloga2.m
clear all
a1 = ones(4);
a1(2,1) = 2;
a1(3,4) = 3
a2 = [1+i,1,1-i;2i,1-3i,1;4-i,1+2i,i]
a3 = [a1, eye(4); zeros(4), 2*a1]
a1(3,:) % tretja vrstica matrike a1
a1(:,1) % prvi stolpec matrike a1
a3(5:end,1:4) = ones(4)*2 % spremenimo matriko a3
det(a3) % determinanta
eig(a3) % lastne vrednosti
max(max(abs(a2))) % maksimalni element po abs. vrednosti
x = a2(:,2);
```

```
y = a2(:,3);
x'*y % skalarni produkt x in y
```

3. Napišite funkcijo `sestejN(n)`, ki sešteje prvih n naravnih števil. Uporabite zanko `for`. Napišite še funkcijo `sestejN2(n)`, pri kateri ne uporabite zanke. Rezultate lahko preverite s formulo

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Rešitev.

```
% sestejN.m
function y = sestejN(n)
     y = 0;
     for i = 1:n
          y = y + i;
     end
end

% sestejN2.m
function y = sestejN2(n)
     y = sum(1:n);
end

% Naloga3.m
% preizkusimo funkciji sestejN in sestejN2
clear all
n=9;
sestejN(n)
sestejN2(n)
% preverimo rezultat po formuli
1/2*n*(n+1)
```

4. Napišite funkcijo `enakomerno(xzac,xkon,n)`, ki naredi isto kot funkcija `linspace`, tj. funkcija naj ustvari vektor, ki vsebuje `n` vrednosti, ki so enakomerno razporejene od `xzac` do `xkon`.

Rešitev.

```
% enakomerno.m
function y = enakomerno(xzac,xkon,n)
```

```
        t = (xkon - xzac)/(n-1);
        y = xzac:t:xkon;
end

% Naloga4.m
% preizkusimo funkcijo enakomerno
clear all
enakomerno(1,2,5)
linspace(1,2,5)
```

5. Napišite funkcijo `minEksponent(a,b)`, ki izračuna najmanjše naravno število n, za katerega je $a^n \geq b$. Ne uporabite funkcije `log`.

   Rešitev.

```
% minEksponent.m
function y = minEksponent(a,b)
        n=1;
        while a^n < b
                n=n+1;
        end
        y = n;
end

% Naloga5.m
% preizkusimo funkcijo minEksponent
clear all
minEksponent(2,5)
```

6. Napišite funkcijo `matrikan(n)`, ki vrne matriko velikosti $n\times n$ naslednje oblike (za $n = 4$):

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} .$$

   Rešitev.

```
% matrikan.m
function y = matrikan(n)
        y = ones(n);
        v = 1:n;
```

```
    for i = 1:n
        y(i,:) = v + (i-1);
    end
end
```

```
% Naloga6.m
% testiramo funkcijo matrikan
clear all
matrikan(4)
```

7. Napišite funkcijo `poVrsti(n)`, ki vrne matriko velikosti $n \times n$, v kateri so po vrsti števila od 1 do n^2. Primer:

$$\texttt{poVrsti(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Namig: Pomagajte si s funkcijo `reshape`.

Rešitev. Funkcija `reshape(v,m,n)` iz vektorja v naredi matriko dimenzije $m \times n$.

```
% poVrsti.m
function y = poVrsti(n)
    y = 1:n^2;
    y = reshape(y,n,n)';
end
```

```
% Naloga7.m
% preizkusimo funkcijo poVrsti
clear all
poVrsti(3)
```

8. Napišite program za generiranje matrik oblike

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

```
% matrika.m
function m = matrika(n)
     m = ones(n);
     v = 1:n;
     for i=1:n
          m(i,i:end) = v(1:end-i+1);
          m(i,1:i) = v(i:-1:1);
     end
end

% Naloga8.m
% preizkusimo funkcijo matrika
clear all
matrika(5)
```

9. Napišite funkcijo `tridiagonalna(sp,d,zg,n)`, ki vrne matriko dimenzije $n \times n$, v kateri so na diagonali števila d, nad diagonalo števila zg, pod diagonalo pa števila sp.

   Rešitev.

```
% tridiagonalna.m
function y = tridiagonalna(sp,d,zg,n)
     diagonala = ones(n,1)*d;
     naddiag = ones(n-1,1)*zg;
     poddiag = ones(n-1,1)*sp;
     y = diag(diagonala)+diag(naddiag,1)+diag(poddiag,-1);
end

% Naloga9.m
% preizkusimo funkcijo tridiagonalna
clear all
tridiagonalna(3,5,2,4)
```

10. Sestavite funkcijo, ki bo izračunala vrednost periodične realne funkcije, ki je na [0,10) definirana takole:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin(x), & 0 \le x < 2 \\ |x-3|, & 2 \le x \le 4 \\ (x-5)^2, & 4 < x < 7 \\ 12 - 5x, & 7 \le x < 10 \end{cases}$$

Namig: Uporabite funkcijo `mod`.

Rešitev. Funkcija `mod(a,n)` vrne število med 0 in $n-1$, ki ustreza ostanku pri deljenju števila a z n. Ostanek pri deljenju izračunamo s pomočjo funkcije `rem(a,n)`. Razlika med `mod` in `rem` je pri negativnih številih a. Tako je `mod(5,3) = 2` in `mod(-1,3) = 2`, ostanka pa sta `rem(5,3) = 2` in `rem(-1,3)=-1`.

```
% fun.m
function y = fun(x)
     x = mod(x,10);
     if x<2
          y = x + sin(x);
     elseif x <= 4
          y = abs(x-3);
     elseif x < 7
          y = (x-5)^2;
     else
          y = 12 - 5*x;
     end
end

% Naloga10.m
% preizkusimo funkcijo fun
clear all
fun(3)
fun(-4)
fun(1)
fun(5)
```

11. Sestavite funkcijo `postevanka()`, ki prebere števili a in n in izpiše poštevanko števila a od a do $n * a$.

    Rešitev.

```
% postevanka.m
function y = postevanka()
     a = input('Vnesi stevilo a: ');
     n = input('Vnesi stevilo n: ');
     y = a:a:(n*a);
end
```

```
% Naloga11.m
% preizkusimo funkcijo postevanka
clear all
postevanka
```

12. Sestavite funkcijo `stDeliteljev(n)`, ki prebere naravno število n in izpiše, koliko deliteljev ima n.

    Namig: Uporabite funkcijo `rem` ali funkcijo `mod`.

    Rešitev. Funkciji `rem` in `mod` sta opisani v rešitvi naloge 10.

```
% stDeliteljev.m
function y = stDeliteljev(n)
     y = 0;
     for i=1:n
          if rem(n,i) == 0
               y=y+1;
          end
     end
end
```

```
% Naloga12.m
% preizkusimo funkcijo stDeliteljev
clear all
stDeliteljev(12)
```

13. Sestavite funkcijo `osnova(n,b)`, ki izpiše število n v bazi $b, 1 < b < 10$.

    Rešitev.

```
% osnova.m
function y = osnova(n,b)
     v = rem(n,b);
     s = 1;
     while n ~= 0
          n = floor(n/b);
          v = [v,rem(n,b)];
          s = [s,s(end)*10];
     end
     y = v*s';
end
```

```
% Naloga13.m
% preizkusimo funkcijo osnova
clear all
osnova(13,2)
```

14. Sestavite funkcijo `minmaxPovpr(m)`, ki vrne dve vrednosti. Prva vrednost je minimum povprečja stolpcev matrike m, druga pa maksimum povprečja stolpcev matrike m.

    Rešitev.

```
% minmaxPovpr.m
function [a,b] = minmaxPovpr(m)
     v = sum(m) / length(m); %vektor povprecij stolpcev
     a = min(v);
     b = max(v);
end
```

```
% Naloga14.m
% preizkusimo funkcijo minmaxPovpr
clear all
[a,b] = minmaxPovpr(rand(5))
```

15. Narišite graf funkcije $\sin x$ na intervalu $[-3, 3]$.

    Rešitev.

```
% Naloga15.m
clear all
x = -3:.01:3;
plot(x,sin(x))
```

16. Narišite graf funkcije $\arccos x \cdot x^2$ na intervalu $[-1, 1]$. Opremite ga z imenoma osi in naslovom.

    Rešitev.

```
% Naloga16.m
clear all
x = -1:.01:1;
y = acos(x).*(x.^2);
plot(x,y),
xlabel('os x'), ylabel('os y'),
title('Moj prvi graf')
```

17. Napišite funkcijo `horner(a,x)`, ki po Hornerjevem algoritmu izračuna vrednost polinoma $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ v dani točki x. Pri tem je vektor $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ vektor koeficientov polinoma.
    Hornerjev algoritem:
    $b_n = a_n$
    $i = n-1, n-2, \ldots, 0$
    $\qquad b_i = x b_{i+1} + a_i$
    Dobljeni b_0 je enak vrednosti polinoma p v točki x.

    Rešitev.

```
% horner.m
function y = horner(a,x)
     b = a(end);
     n = length(a);
     for i = n-1:-1:1
          b = x*b + a(i);
     end
     y = b;
end

% Naloga17.m
% preizkusimo delovanje funkcije horner
clear all
horner([1,5,3],2)
1 + 5*2 + 3*2^2
```

18. Napišite funkcijo `dpoly(a)`, ki vrne vektor s koeficienti odvoda polinoma, podanega z vektorjem koeficientov a.

    Rešitev.

```
% dpoly.m
function v = dpoly(a)
     n = length(a);
     v = [1:n-1].*a(2:end);
end

% Naloga18.m
% preizkusimo delovanje funkcije dpoly
clear all
dpoly([1,3,5])
```

Poglavje 2

Aritmetika v premični piki in stabilnost izračuna

Računanje z računalnikom ni natančno. Že v srednji šoli smo pri računanju s kalkulatorjem ugotovili, da se lahko končni rezultati razlikujejo, če vmesne rezultate zaokrožamo. Zato je bilo pomembno, da smo rezultate zaokrožili na dovolj veliko število decimalk. Pri zaokroževanju na dve decimalki ne veljajo naslednje enakosti:

$$\sqrt{3}\,\sqrt{2} = \sqrt{6} \text{ zaokrožimo na } 1.73 * 1.41 = 2.44 \neq 2.45,$$
$$\sqrt{5}\,\sqrt{3} = \sqrt{15} \text{ zaokrožimo na } 2.24 * 1.73 = 3.88 \neq 3.87.$$

Podobno je tudi pri računalniku, le da je tu zapis daljši kot tisti, ki smo ga uporabljali v srednji šoli. Z Octaveom izračunajmo izraz

$$0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.1 - 1 :$$

```
% premicnaPika.m
% test zaokroževanja rezultatov
clear all
x = 0;
for i = 1:10
    x = x + 0.1;
end
x = x - 1
```

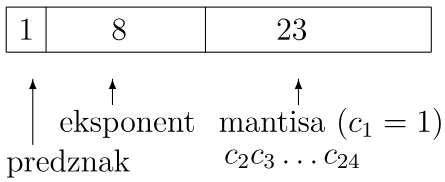
V zanki smo številu 0 desetkrat prišteli 0.1, nato pa smo rezultatu odšteli 1, zato pričakujemo, da bo rezultat računa enak 0, vendar ni. Octave vrne rezultat $x = -1.1102 \cdot 10^{-16}$, kar je približno enako velikosti osnovne zaokrožitvene napake, ki jo bomo spoznali kasneje.

2.1 Premična pika

Število x je v premični piki zapisano v obliki

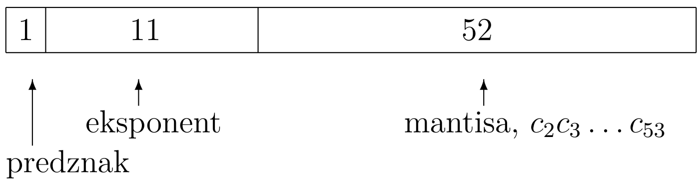
$$x = \pm m \cdot b^e.$$

Število m je *mantisa*, število b je *baza* (običajno 2 - dvojiški zapis mantise, lahko tudi 10 ali 16), število e je *eksponent* v mejah $L \leq e \leq U$. Mantiso zapišemo v obliki $m = 0.c_1c_2 \ldots c_t$, kjer je t dolžina mantise. Če je $c_1 \neq 0$, pravimo, da je število *normalizirano.* V zapisu so c_i števke med 0 in $b-1$. Zapis označimo z $P(b, t, L, U)$. Številom, ki jih dobimo na ta način, pravimo *predstavljiva števila.* Vsa ostala števila zaokrožimo na najbližje predstavljivo število. V praksi gledamo števko, ki sledi števki na mestu t. Če je ta števka $\geq \frac{1}{2}b$, števki c_t prištejemo 1, kar morda vpliva še na števke pred njo, sicer samo odrežemo ostanek.



Slika 2.1: Predstavljiva števila v enojni natančnosti.

Najbolj pogosto uporabljamo aritmetiko, ki jo predpisuje *IEEE standard.* V osnovni obliki so v računalniku števila zapisana v enojni ali v dvojni natančnosti. V enojni natančnosti so števila shranjena v 32 bitih in zapisana v obliki $P(2, 24, -125, 128)$ (slika 2.1). V dvojni natančnosti so števila zapisana v obliki $P(2, 53, -1021, 1024)$ in jih shranimo v 64 bitih (slika 2.2).



Slika 2.2: Predstavljiva števila v dvojni natančnosti.

2.2 Osnovna zaokrožitvena napaka

Osnovna zaokrožitvena napaka u nastane, ker ne moremo natančno predstaviti vsakega števila. Enaka je

$$u = \frac{1}{2}b^{1-t}.$$

Pri zapisu števila v enojni natančnosti je $u \approx 6 \cdot 10^{-8}$, pri dvojni natančnosti pa je $u = 2^{-53} \approx 10^{-16}$.
Naj bo x dano število. Označimo najbližje predstavljivo število s $fl(x)$. Velja

$$fl(x) = x(1+\delta), \ |\delta| \leq u,$$
$$\frac{|fl(x) - x|}{|x|} \leq \frac{u}{1+u} \approx u.$$

Pri IEEE standardu za računanje s standardnimi operacijami velja

$$fl(x \circ y) = (x \circ y)(1+\delta), \ |\delta| \leq u,$$
$$fl(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1+\delta), \ |\delta| \leq u,$$

kjer je $\circ$ katerakoli od operacij +, -, *, /. Tu je δ relativna napaka.

2.3 Stabilnost izračuna

Težave s stabilnostjo pri numeričnih izračunih imamo najpogosteje, kadar odštevamo dve števili približno enake velikosti ali kadar delimo z majhnim številom.

2.4 Naloge

1. Zapišite števila 1362, 2267 in 3921 v dvojiškem zapisu.

   Rešitev. Število lahko zapišemo v dvojiškem zapisu na več načinov.
   1. način - deljenje z 2:

1362:2 = 681	ost. 0
681:2 = 340	ost. 1
340:2 = 170	ost. 0
170:2 = 85	ost. 0
85:2 = 42	ost. 1
42:2 = 21	ost. 0
21:2 = 10	ost. 1
10:2 = 5	ost. 0
5:2 = 2	ost. 1
2:2 = 1	ost. 0
1:2 = 0	ost. 1

Zadnja vrstica je vedno enaka. Dvojiški zapis števila dobimo tako, da preberemo ostanke od spodaj navzgor. Torej je dvojiški zapis števila $1362_{(10)} = 10101010010_{(2)}$.

2. način - zapis s potencami:
Število zapišemo kot vsoto potenc števila 2. Odštejemo mu največjo možno potenco 2^k, pogledamo ostanek in ponovimo postopek. V našem primeru je

$$1362 = 2^{10}+338 = 2^{10}+2^8+82 = 2^{10}+2^8+2^6+18 = 2^{10}+2^8+2^6+2^4+2^1.$$

Zadnja števka v dvojiškem zapisu ustreza členu 2^0. Če člen nastopa v zapisu, je števka enaka 1, sicer je enaka 0. Števka levo od nje ustreza členu z 2^1 in je enaka 1, če tak člen nastopa v zapisu, ... V našem primeru dobimo zapis $1362_{(10)} = 10101010010_{(2)}$.

Zapišimo dvojiško še ostali dve števili:

$$\begin{aligned} 2267 &= 2^{11} + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 100011011011_{(2)}, \\ 3921 &= 2^{11} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^0 = 111101010001_{(2)}. \end{aligned}$$

2. Zapišite število 3481 v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini.

Rešitev. Zapišimo število $x = 3481$ v obliki $x = (-1)^s(1+f)\cdot 2^{e-1023}$. Najprej zapišimo x v dvojiškem zapisu, zato ga zapišemo kot vsoto potenc števila 2:

$$3481 = 2^{11} + 2^{10} + 2^8 + 2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^0.$$

Torej je $3481_{(10)} = 110110011001_{(2)} = 1.10110011001 \cdot 2^{11}$. Množenje z 2^{11} tu pomeni premik pike za 11 mest v levo. Iz tega zapisa vidimo, da je $f = 0.10110011001$ in $e = 11 + 1023 = 1034$.

Tudi eksponent zapišemo v dvojiški bazi in dobimo $e = 1034_{(10)} = 2^{10} + 2^3 + 2^1 = 10000001010_{(2)}$.

Zapis števila x v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini je torej

0	10000001010	$\underbrace{101100110010000\ldots0}_{52}$

Rezultat lahko preverimo z Octaveom. Vpišemo `format bit` in desetiško število (v tem primeru 3481).

3. Zapišite število 1342 v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini.

   Rešitev. Zapišimo število $x = 1342$ v obliki $x = (-1)^s(1+f)\cdot 2^{e-1023}$. Najprej zapišimo x v dvojiškem zapisu,

$1342{:}2 = 671$	ost. 0
$671{:}2 = 335$	ost. 1
$335{:}2 = 167$	ost. 1
$167{:}2 = 83$	ost. 1
$83{:}2 = 41$	ost. 1
$41{:}2 = 20$	ost. 1
$20{:}2 = 10$	ost. 0
$10{:}2 = 5$	ost. 0
$5{:}2 = 2$	ost. 1
$2{:}2 = 1$	ost. 0
$1{:}2 = 0$	ost. 1

   Zdaj preberemo ostanke od spodaj navzgor, torej je

   $$1342_{(10)} = 10100111110_{(2)} = 1.0100111110 \cdot 2^{10}.$$

   Iz tega zapisa vidimo, da je $f = 0.0100111110$ in $e = 10+1023 = 1033$.

   Še eksponent zapišemo v dvojiški bazi in dobimo $e = 1033_{(10)} = 2^{10} + 2^3 + 2^0 = 10000001001_{(2)}$.

   Zapis števila x v aritmetiki s premično piko v dvojni dolžini je torej

0	10000001001	$\underbrace{01001111100\ldots0}_{52}$

   Rezultat lahko preverimo z Octaveom. Vpišemo `format bit` in desetiško število (v tem primeru 1342).

4. Zapišite število 796 v aritmetiki s premično piko v enojni dolžini.

   Rešitev. Zapišimo število $x = 796$ v obliki $x = (-1)^s(1+f)\cdot 2^{e-127}$. Najprej zapišimo x v dvojiškem zapisu,

$796:2 = 398$	ost. 0
$398:2 = 199$	ost. 0
$199:2 = 99$	ost. 1
$99:2 = 49$	ost. 1
$49:2 = 24$	ost. 1
$24:2 = 12$	ost. 0
$12:2 = 6$	ost. 0
$6:2 = 3$	ost. 0
$3:2 = 1$	ost. 1
$1:2 = 0$	ost. 1

Zdaj preberemo ostanke od spodaj navzgor, torej je

$$796_{(10)} = 1100011100_{(2)} = 1.100011100 \cdot 2^9.$$

Iz tega zapisa vidimo, da je $f = 0.100011100$ in $e = 9 + 127 = 136$.

Še eksponent zapišemo v dvojiški bazi in dobimo $e = 136_{(10)} = 2^7+2^3 = 10001000_{(2)}$.

Zapis števila x v aritmetiki s premično piko v enojni dolžini je torej

0	10001000	$\underbrace{100011100\ldots0}_{23}$

5. Pokažite, da je

$$0.1 = \sum_{i=1}^{\infty}(2^{-4i} + 2^{-4i-1}) \tag{2.1}$$

in od tod pokažite, da je binarni zapis za $x = 0.1$ enak $0.000\overline{1100}_{(2)}$ (zadnje 4 števke se ponavljajo). Izračunajte $fl(0.1)$ v binarni IEEE aritmetiki z enojno natančnostjo.

Rešitev. Uporabili bomo formulo za vsoto neskončne geometrijske vrste

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}, \quad \text{za } |q| < 1.$$

Izračunajmo vsoto na desni strani (2.1):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}(2^{-4i}+2^{-4i-1}) &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2^4}\right)^i+\left(\frac{1}{2^4}\right)^i\cdot\frac{1}{2}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^i\right)\\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^i\\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}\\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{16}{15}\\
&= \frac{1}{10} = 0.1.
\end{aligned}
$$

Od tod sledi

$$
\begin{aligned}
0.1 &= \sum_{i=1}^{\infty}(2^{-4i}+2^{-4i-1})\\
&= 2^{-4}+2^{-5}+2^{-8}+2^{-9}+2^{-12}+2^{-13}+\dots\\
&= 0.00011001100\overline{1100}_2\\
&= 0.11001100\overline{1100}_2\cdot 2^{-3}.
\end{aligned}
$$

Ko računamo $fl(0.1)$, nas zanimata 24. in 25. mesto v zapisu, saj zaokrožujemo na 24 decimalk. Vidimo, da je števka na 25. mestu enaka 1, števka na 24. mestu pa je 0. Ko število zaokrožimo, bo na 24. mestu 1, ostale števke pa se ne spremenijo.

Rezultat je $fl(x) = 0.\underbrace{11001100\dots1101}_{24}\cdot 2^{-3}$.

6. Naj bosta x in y predstavljivi števili. Ocenite napako pri izračunu x^2-y^2 v premični piki, če računate na dva načina

   (a) $x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$,

   (b) x^2-y^2.

   Rešitev. Vemo, da velja

$$
fl(x\circ y)=(x\circ y)\cdot(1+\delta),\ |\delta|\le u,
$$

od koder sledi

$$\left|\frac{fl(x \circ y) - x \circ y}{x \circ y}\right| = |\delta|,$$

kar nam olajša računanje napake.

(a) Predpostavimo, da je $x > y$. Zapišimo izraz v zgornji obliki

$$\begin{aligned} fl\big((x-y)(x+y)\big) &= (x-y)(x+y)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \\ &\leq (x-y)(x+y)(1+u)^3 \\ &= (x^2-y^2)(1+3u+3u^2+u^3) \\ &= (x^2-y^2)(1+3u+\mathcal{O}(u^2)), \end{aligned}$$

kjer so $|\delta_i| \leq u, \ i = 1,2,3$. Napaka δ_1 nastopi zaradi napake pri odštevanju, δ_2 zaradi napake pri seštevanju, δ_3 pa zaradi napake pri množenju. Ker je u majhen, sta u^2 in u^3 še precej manjša, zato ju lahko zanemarimo in to označimo z oznako $\mathcal{O}$.
Ocenimo $fl\big((x-y)(x+y)\big)$ še navzdol,

$$\begin{aligned} fl\big((x-y)(x+y)\big) &= (x-y)(x+y)(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \\ &\geq (x-y)(x+y)(1-u)^3 \\ &= (x^2-y^2)(1-3u+3u^2-u^3) \\ &= (x^2-y^2)(1-3u+\mathcal{O}(u^2)), \end{aligned}$$

torej velja

$$\left|fl\big((x-y)(x+y)\big)\right| \leq (x^2-y^2)(1+3u+\mathcal{O}(u^2))$$

in je

$$\left|\frac{fl\big((x-y)(x+y)\big) - (x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}\right| \leq 3u + \mathcal{O}(u^2).$$

Za $y < x$ zamenjamo vlogi x in y.

(b) Spet si pomagamo z izrekom in zapišemo

$$fl(x^2-y^2) = (x^2(1+\delta_1) - y^2(1+\delta_2))(1+\delta_3),$$

kjer so $|\delta_i| \leq u, \ i = 1,2,3$. Sledi

$$\begin{aligned} fl(x^2-y^2) &= x^2(1+\delta_1)(1+\delta_3) - y^2(1+\delta_2)(1+\delta_3) \\ &= x^2(1+\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3) - y^2(1+\delta_2+\delta_3+\delta_2\delta_3) \\ &= x^2 - y^2 + x^2(\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3) - y^2(\delta_2+\delta_3+\delta_2\delta_3), \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{fl(x^2-y^2)-(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\right| &= \left|\frac{x^2(\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3)-y^2(\delta_2+\delta_3+\delta_2\delta_3)}{x^2-y^2}\right| \\
&\leq \frac{x^2(2u+u^2)+y^2(2u+u^2)}{|x^2-y^2|} \\
&= \frac{(2u+u^2)(x^2+y^2)}{|x^2-y^2|}.
\end{aligned}$$

Izraz je odvisen od x in y, zato bo tak izračun slabši od prejšnjega. Problem je imenovalec, če je $|x| \approx |y|$.

7. Pokažite, da pri računanju vsote in produkta kompleksnih števil $x, y \in \mathbb{C}$ v premični piki velja

   (a) $fl(x+y) = (x+y)(1+\delta),\ |\delta| \leq u$,
   (b) $fl(x \cdot y) = (x \cdot y)(1+\delta),\ |\delta| \leq \sqrt{2}u(2+u)$.

   Rešitev. Ker sta $x, y \in \mathbb{C}$, je tudi $\delta \in \mathbb{C}$. Zapišimo $x = a + bi$ in $y = c + di,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

   (a) Vsoto kompleksnih števil izračunamo kot $x+y = (a+c)+(b+d)i$, torej porabimo dve seštevanji (množenje z i loči komponenti), zato je

$$\begin{aligned}
fl(x+y) &= (a+c)(1+\delta_1)+(b+d)(1+\delta_2)i \\
&= \underbrace{(a+c)+(b+d)i}_{x+y} + (a+c)\delta_1+(b+d)\delta_2 i \\
&= (x+y)+(x+y)\delta \ \ \text{(hočemo dobiti)},
\end{aligned}$$

   kjer sta $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R},\ |\delta_i| \leq u$. Torej je

$$\delta = \frac{(a+c)\delta_1+(b+d)\delta_2 i}{x+y}$$

   in zato

$$\begin{aligned}
|\delta|^2 &= \frac{(a+c)^2\delta_1^2+(b+d)^2\delta_2^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&\leq \frac{(a+c)^2u^2+(b+d)^2u^2}{(a+c)^2+(b+d)^2} \\
&= \frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}u^2 \\
&= u^2,
\end{aligned}$$

   torej je $|\delta| \leq u$.

(b) Produkt kompleksnih števil izračunamo kot $x \cdot y = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+i(ad+bc)$, torej za izračun porabimo 4 realna množenja in 2 realni seštevanji. Zapišemo

$$\begin{aligned} fl(xy) = (ac(1+\delta_1) - bd(1+\delta_2))\,(1+\delta_3)+ \\ + i\,(ad(1+\delta_4) + bc(1+\delta_5))\,(1+\delta_6) \end{aligned}$$

in zaradi lažjega računanja definiramo

$(1+\delta_1)(1+\delta_3) = 1+\gamma_1, \quad (1+\delta_4)(1+\delta_6) = 1+\gamma_3,$

$(1+\delta_2)(1+\delta_3) = 1+\gamma_2, \quad (1+\delta_5)(1+\delta_6) = 1+\gamma_4.$

Od tod dobimo $1+\delta_1+\delta_3+\delta_1\delta_3 = 1+\gamma_1$, torej velja

$$|\gamma_1| \leq 2u + u^2.$$

Enako oceno dobimo tudi za ostale γ_i. Uporabimo jo v zgornjem izrazu,

$$\begin{aligned} fl(xy) &= ac(1+\gamma_1) - bd(1+\gamma_2) + i\,(ad(1+\gamma_3) + bc(1+\gamma_4)) \\ &= \underbrace{(ac-bd) + i(ad+bc)}_{xy} + ac\gamma_1 - bd\gamma_2 + i(ad\gamma_3 + bc\gamma_4) \\ &= xy(1+\delta), \end{aligned}$$

torej je

$$|xy\delta| = |ac\gamma_1 - bd\gamma_2 + i(ad\gamma_3 + bc\gamma_4)|.$$

Preoblikujmo zgornjo enačbo,

$$\begin{aligned} |x|^2|y|^2|\delta|^2 &= |ac\gamma_1 - bd\gamma_2|^2 + |ad\gamma_3 + bc\gamma_4|^2 \\ &\leq (|ac| + |bd|)^2(2u+u^2)^2 + (|ad| + |bc|)^2(2u+u^2)^2 \\ &= (2u+u^2)^2\left((|ac| + |bd|)^2 + (|ad| + |bc|)^2\right) \\ &\leq (2u+u^2)^2\Big((|ac| - |bd|)^2 + (|ac| + |bd|)^2 + \\ &\quad + (|ad| - |bc|)^2 + (|ad| + |bc|)^2\Big), \end{aligned}$$

kjer smo prišteli dva pozitivna člena. Izbrali smo taka člena, da se račun lepo poenostavi,

$$\begin{aligned} &= (2u+u^2)^2(2|ac|^2 + 2|bd|^2 + 2|ad|^2 + 2|bc|^2) \\ &= 2(2u+u^2)^2(a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2) \\ &= 2(2u+u^2)^2(a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2)) \\ &= 2(2u+u^2)^2(a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= 2(2u+u^2)^2|x|^2|y|^2, \end{aligned}$$

torej je

$$|\delta| \leq \sqrt{2}(2u + u^2) = \sqrt{2}(2 + u) \cdot u.$$

8. Zapišite izraze v stabilnejši obliki za računanje in povejte kje so težave s stabilnostjo:

   (a) $x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$,

   (b) $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$,

   (c) $\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + \log x$,

   (d) $\sqrt{1+x} - 1$.

   Rešitev.

   (a) Težava pri izračunu $x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ je odštevanje, zato preuredimo izraz

$$\begin{aligned} x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= x\frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

   (b) Težava pri izračunu $\dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ je odštevanje ali deljenje z majhnim številom. Preuredimo izraz v

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot 2\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin x}{x \cos \frac{x}{2}}\right)^2, \end{aligned}$$

   kjer smo uporabili $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$, kar dobimo iz

$$\begin{aligned} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) &= 2\cos^2 x - 1, \\ 1 + \cos 2x &= 2\cos^2 x, \\ 1 + \cos x &= 2\cos^2 \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

(c) Težava pri izračunu $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\log x$ je deljenje z majhnim x. Preuredimo izraz

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log x &= \log\left(\frac{x+1}{x}\right)+\log x\\ &= \log(x+1)-\log x+\log x\\ &= \log(x+1).\end{aligned}$$

(d) Težava pri izračunu $\sqrt{1+x}-1$ je odštevanje. Preuredimo izraz

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}-1 &= \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1}\\ &= \frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1}\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}\end{aligned}$$

9. Dan imamo tangens kota $\tan\alpha = t$. Stabilno izračunajte $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$.

Rešitev. Poznamo $\tan\alpha$, želimo izračunati $\sin\alpha$ in $\cos\alpha$.

1. ideja:

$$\begin{gathered}t=\tan\alpha,\\ \alpha=\arctan t,\\ \text{izračunamo } \sin\alpha \text{ in } \cos\alpha.\end{gathered}$$

Tak način računanja ni ekonomičen, saj trikrat računamo vrednost trigonometrične funkcije.

2. ideja:
Uvedemo oznaki $c=\cos\alpha$, $s=\sin\alpha$, dan je $t=\tan\alpha$.
Iz $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ dobimo

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

torej je

$$\cos\alpha=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}},$$

sinus kota pa dobimo iz

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Algoritem:
1 $\quad r = \sqrt{1+t^2}$ - račun je stabilen (seštevamo pozitivni števili)
2 $\quad c = \pm\frac{1}{r}$ - ker je $r \geq 1$, nimamo težav (težave so pri deljenju z majhnimi števili)
3 $\quad s = \pm\sqrt{1-c^2}$ - težave imamo, kadar je c blizu ± 1, saj takrat odštevamo približno enake vrednosti
Predznake $\pm$ izberemo glede na predznak $t = \frac{s}{c}$.

3. ideja:
Popravimo izračun $\sin\alpha$ in dobimo

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{1+t^2}} = \frac{\pm t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\pm t}{r} = t \cdot c.$$

Tretji korak zgornjega algoritma popravimo na $s = t \cdot c$, kar izračunamo stabilno. Ta algoritem porabi manj operacij kot prvotni in vse so elementarne.

10. Dano je kompleksno število $\alpha = u + iv$, kjer sta $u, v \in \mathbb{R}$ in $v \neq 0$. Izračunajte $\sqrt{\alpha} = x + iy$ v realni aritmetiki na stabilen način.

    Rešitev. Izrazimo x in y z danima u in v,

    $$u + iv = \alpha = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

    Od tod dobimo sistem

    $$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2, \\ v &= 2xy. \end{aligned} \tag{2.2}$$

    Iz druge enačbe izrazimo $x = \frac{v}{2y}$ in ga vstavimo v prvo enačbo,

    $$\begin{aligned} u &= \left(\frac{v}{2y}\right)^2 - y^2, \\ 4uy^2 &= v^2 - 4y^4, \\ 4y^4 + 4uy^2 - v^2 &= 0. \end{aligned}$$

    Od tod dobimo rešitve za y^2,

    $$\begin{aligned} y_{1,2}^2 &= \frac{-4u \pm \sqrt{16u^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-v^2)}}{2 \cdot 4} \\ &= -\frac{1}{2}u \pm \frac{1}{2}\sqrt{u^2+v^2} \\ &= \frac{1}{2}(|\alpha| - u), \end{aligned}$$

kjer smo označili $|\alpha| = \sqrt{u^2+v^2}$, rešitev z minusom pa nas ne zanima, saj bi v tem primeru dobili negativno število, mi pa iščemo realen y. Torej je

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|\alpha| - u)}.$$

Iz prve enačbe sistema (2.2) izrazimo še x in uporabimo rezultat,

$$\begin{aligned} x^2 &= u + y^2 \\ &= u + \frac{1}{2}(|\alpha| - u) \\ &= \frac{1}{2}(|\alpha| + u), \end{aligned}$$

torej je

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|\alpha| + u)}.$$

Algoritem:

$t = |\alpha| = \sqrt{u^2+v^2}$, račun je stabilen (to uporabimo, da ne računamo večkrat iste vrednosti).

$x = \pm\sqrt{\frac{t+u}{2}}$, tukaj lahko nastopi problem, če je $u < 0$ in $t \approx |u|$.

$y = \pm\sqrt{\frac{t-u}{2}}$, tukaj lahko nastopi problem, če je $u > 0$ in $t \approx u$.

Prvi problem je, kako izbrati predznak pri x in y. Izberemo ga tako, da je predznak xy enak predznaku pri v (druga enačba sistema (2.2)). Izračun x ali y je nestabilen za majhne v, saj je takrat $|u| \approx |\alpha| = t$.

Popravimo algoritem:

```
t = √(u² + v²) (= |α|)
če je u ≥ 0
    x = ±√((t+u)/2)
    y = v/(2x)
če je u < 0
    y = ±√((t−u)/2)
    x = v/(2y)
```

Želimo se izogniti večkratnemu računanju istega izraza. V tem primeru smo prihranili en izračun kvadratnega korena. Problemi z izračunom lahko nastanejo, če je x ali y blizu 0. Temu se ne moremo izogniti.

11. Stabilno izračunajte vrednost

$$y = \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$$

Izračun preizkusite z Octaveom.

Rešitev. Težave imamo, kadar je $\cos x$ blizu 1, kadar je $\sin x$ blizu 0 in kadar je x blizu 0. Preoblikujmo izraz:

$$y = \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\tan\frac{x}{2}}{x}.$$

Upoštevali smo enakosti

$$\begin{aligned} 1-\cos x &= 2\sin^2\frac{x}{2}, \\ \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Če preizkusimo dobljena izraza v Octaveu, za majhen x res dobimo različna rezultata. Zaporedje ukazov

```
clear all
y1 = @(x) (1-cos(x))/(x*sin(x));
y2 = @(x) tan(x/2)/x;
x = 10^(-9);
y1(x)
y2(x)
```

vrne rezultata 0 in 0.5.

Poglavje 3

Reševanje nelinearnih enačb

3.1 Bisekcija

Dana je zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Iščemo rešitve enačbe $f(x) = 0$. Vemo, da velja naslednji izrek:

Izrek. Naj bo $f(x)$ zvezna funkcija na $[a, b]$ in $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potem ima $f(x)$ na intervalu (a, b) ničlo, tj. obstaja tak $\xi \in (a, b)$, da je $f(\xi) = 0$.

Algoritem:

Dani so a, b, ε, f; metoda vrne c.

$f_a = f(a)$

$f_b = f(b)$

$e = b - a$

`if` $\mathrm{sign}(f_a) = \mathrm{sign}(f_b)$ `stop`

`repeat`

$e = \frac{1}{2}e$

$c = a + e$

$f_c = f(c)$

`if` $\mathrm{sign}(f_a) = \mathrm{sign}(f_c)$

$a = c$

$f_a = f_c$

`else`

$b = c$

$f_b = f_c$

`end`

`until` $|e| < \varepsilon$

Točka c, ki jo dobimo s tem algoritmom, je približek za ničlo, ki se od prave ničle razlikuje za manj kot ε.

Slabosti algoritma so:

- Če ima f na (a, b) več ničel, nimamo vpliva na to, katero ničlo dobimo.

- Algoritem ni uporaben za iskanje sodih ničel.

3.1.1 Zgled

Z bisekcijo želimo poiskati približek za $\sqrt{3}$. Vemo, da je $\sqrt{3} \doteq 1.73205$. Bisekcija vrne približke za ničle funkcije na danem intervalu. Ker želimo najti približek za $\sqrt{3}$, moramo najprej izbrati enostavno funkcijo, katere ničla je enaka $\sqrt{3}$. Izberemo funkcijo

$$f(x) = x^2 - 3.$$

Zdaj poiščemo tak interval, da bo na robovih intervala funkcija različno predznačena. Izberemo lahko $[1, 2]$, saj je $f(1) = -2$, $f(2) = 1$. Torej je $a = 1$, $b = 2$. Zdaj lahko naredimo en korak bisekcije:

```
1    f_a = -2
2    f_b = 1
3    c = (a+b)/2 = 3/2 = 1.5
4    f_c = f(c) = -3/4 = -0.75.
```

Zdaj imamo dve možnosti: Ničla je lahko na intervalu $[a, c] = [1, 1.5]$ ali na intervalu $[c, b] = [1.5, 2]$. Če pogledamo vrednosti funkcije v vseh treh točkah, vidimo, da je funkcija različno predznačena na robovih intervala $[1.5, 2]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{3}{2} = 1.5$, $b = 2$:

```
1    f_a = -3/4 = -0.75
2    f_b = 1
3    c = (a+b)/2 = 7/4 = 1.75
4    f_c = f(c) = 1/16 = 0.0625.
```

Ničla je na intervalu $[1.5, 1.75]$. Lahko nadaljujemo z bisekcijo na tem intervalu, če pa smo zadovoljni z natančnostjo $\left|\frac{\frac{7}{4}-\frac{3}{2}}{2}\right| = 0.125$, je približek za ničlo razpolovišče zadnjega intervala

$$c = \frac{\frac{7}{4} + \frac{3}{2}}{2} = 1.625.$$

Poglejmo še, kaj vrne program `bisekcija` ([1]). Za izbrano funkcijo f, začetni interval $[1, 2]$ in natančnost 10^{-2} z zaporedjem ukazov

```
clear all
f = @(x) x^2-3;
bisekcija(f,1,2,10^(-2))
```

dobimo zaporedje približkov $x_0 = 1.5000$, $x_1 = 1.7500$, $x_2 = 1.6250$, $x_3 = 1.6875$, $x_4 = 1.7188$, $x_5 = 1.7344$, $x_6 = 1.7266$, rešitev pa je $\sqrt{3} \doteq 1.7305$. (Vmesnih približkov program ne izpisuje. Dobimo jih, če v zanki v datoteki `bisekcija.m` izpisujemo vrednosti spremenljivke `c`.)

3.2 Navadna iteracija

Iščemo rešitev α enačbe $f(x) = 0$. Najprej zapišemo problem $f(x) = 0$ v obliki $x = g(x)$ za ustrezno *iteracijsko funkcijo* $g(x)$. Za rešitev velja $g(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$. Če je $\alpha = g(\alpha)$, pravimo, da je α *negibna točka* funkcije g.
Algoritem:
1 `izberi` x_0
2 $r = 1, 2, \ldots$
3 $x_r = g(x_{r-1})$

Pri primerno izbranem *začetnem približku* x_0 in primerno izbrani funkciji g zaporedje konvergira k negibni točki funkcije g, ki je ničla funkcije f.
Negibne točke delimo na

- *odbojne*, če je $|g'(\alpha)| \geq 1$,
- *privlačne*, če je $|g'(\alpha)| < 1$. V tem primeru zaporedje konvergira k ničli, saj velja

Izrek. Naj bo g zvezno odvedljiva na $I = [\alpha - d, \alpha + d]$, kjer je $\alpha = g(\alpha)$, in naj velja $|g'(x)| \leq m < 1$ za vse $x \in I$. Potem za poljuben $x_0 \in I$ zaporedje $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergira proti α.
Zaporedje x_r konvergira k α z *redom* p, če obstajata konstanti $0 < c_1 < c_2$, da velja

$$c_1|x_r - \alpha|^p \leq |x_{r+1} - \alpha| \leq c_2|x_r - \alpha|^p.$$

Če je $p = 1$ imamo *linearno konvergenco,* za $p = 2$ *kvadratično,* ...
Izrek. Če je funkcija $g(x)$ $p-$krat zvezno odvedljiva v okolici negibne točke α in je $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$, potem je red konvergence zaporedja $x_{r+1} = g(x_r)$ enak p.
Pri računanju reda konvergence se pri odvajanju velikokrat zgodi, da je del funkcije v točki α enak 0. Recimo, da lahko funkcijo $g(x)$ zapišemo v obliki $g(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$, kjer je $h_1(\alpha) = 0$. Takrat uporabimo trik. Funkcijo g odvajamo

$$g'(x) = (h_1(x) \cdot h_2(x))' = h_1(x) \cdot h_2'(x) + h_1'(x)h_2(x)$$

in, ko vstavimo α, dobimo

$$g'(\alpha) = h_1'(\alpha)h_2(\alpha).$$

Na ta način se lahko izognemo nepotrebnemu delu pri odvajanju. Celotno funkcijo moramo odvajati le v primeru, ko je $g'(\alpha) = 0$.

Kako poiščemo iteracijsko funkcijo? Primeri:

- $g_1(x) = x - f(x)$,

- $g_2(x) = x - c \cdot f(x),\ c \neq 0$,

- $g_3(x) = x - h(x) \cdot f(x),\ h(\alpha) \neq 0$.

3.2.1 Zgled

Z navadno iteracijo želimo poiskati rešitve enačbe

$$x^3 - 5x + 1 = 0.$$

V Octaveu z ukazom `roots([1,0,-5,1])` poiščemo ničle, ki so

$$\begin{aligned} x_1 &= -2.330058739567982, \\ x_2 &= 2.128419063844577, \\ x_3 &= 0.201639675723405. \end{aligned}$$

Prva iteracijska funkcija, ki jo izpeljemo, je

$$g(x) = \frac{1 + x^3}{5}.$$

Na primerih si oglejmo, kaj se zgodi z zaporedjem pri različnih začetnih približkih. Iteracijsko funkcijo definiramo z ukazom `g = @(x) (1+x.^3)/5`, nato uporabimo funkcijo `iteracija` ([1]). Z ukazi `iteracija(g,0,12)`, `iteracija(g,2,15)` in `iteracija(g,3,10)` dobimo naslednja zaporedja približkov:

x_0	0.000000000000000	2.000000000000000	3.00000000000000e+000
x_1	0.200000000000000	1.800000000000000	5.60000000000000e+000
x_2	0.201600000000000	1.366400000000000	3.53232000000000e+001
x_3	0.201638708019200	0.710227139788800	8.81495237522063e+003
x_4	0.201639652116243	0.271650922681262	1.36990328299253e+011
x_5	0.201639675147505	0.204009253796415	5.14161690798161e+032
x_6	0.201639675709356	0.201698163874077	2.71849877008952e+097
x_7	0.201639675723062	0.201641102963663	4.01806925772563e+291
x_8	0.201639675723396	0.201639710541370	`Inf`
x_9	0.201639675723404	0.201639676572794	`Inf`
x_{10}	0.201639675723405	0.201639675744126	
x_{11}	0.201639675723405	0.201639675723910	
x_{12}		0.201639675723417	
x_{13}		0.201639675723405	
x_{14}		0.201639675723405	

Z rdečo barvo so označene števke, ki se razlikujejo od točne rešitve. Za začetni približek $x_0 = 0$ dobimo zaporedje, ki očitno konvergira k rešitvi x_3. Za začetni približek $x_0 = 2$ dobimo zaporedje, ki spet konvergira k rešitvi x_3, vendar počasneje, saj je bil začetni približek slabši. Za začetni približek $x_0 = 3$ dobimo zaporedje, ki divergira.

Kje nam konvergenco zagotavlja konvergenčni izrek? Poglejmo, kje je odvod iteracijske funkcije po absolutni vrednosti manjši od 1,

$$g'(x) = \frac{3x^2}{5},\ |g'(x)| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt{\frac{5}{3}} \doteq 1.291.$$

Torej nam konvergenčni izrek zagotavlja konvergenco zaporedja le za $|x| < 1.291$. Kot vidimo lahko zaporedje konvergira tudi na večjem intervalu (v našem drugem primeru).

Drugih dveh rešitev enačbe s to iteracijsko funkcijo ne moremo dobiti, saj tam zaporedje ne konvergira. Sestavimo novo iteracijsko funkcijo

$$\begin{aligned} x^3 - 5x + 1 &= 0, \\ x^3 &= 5x - 1, \\ x &= \sqrt[3]{5x-1}. \end{aligned}$$

Nova iteracijska funkcija je torej

$$g(x) = \sqrt[3]{5x-1}.$$

Oglejmo si primer. Definiramo funkcijo `g = @(x) nthroot(5*x-1,3)` in uporabimo ukaz `iteracija(g,-1,31)` za začetni približek $x_0 = -1$ in ukaz `iteracija(g,1,37)` za začetni približek $x_0 = 1$. Tako dobimo zaporedji, ki konvergirata k ničlama x_1 in x_2, vendar zelo počasi.

x_0	-1.00000000000000	1.00000000000000
x_1	-1.81712059283214	1.58740105196820
x_2	-2.16056476459804	1.90717556826722
x_3	-2.27681970564885	2.04369491208149
x_4	-2.31359923956675	2.09678074854246
x_5	-2.32499494801901	2.11671495967476
x_6	-2.32850320095544	2.12410433660789
x_7	-2.32958111700741	2.12683047319964
x_8	-2.32991210810294	2.12783445448731
x_9	-2.33001372526036	2.12820396200576
x_{10}	-2.33004492083705	2.12833992408246
x_{11}	-2.33005449743809	2.12838994761394
x_{12}	-2.33005743730344	2.12840835181395
x_{13}	-2.33005833979421	2.12841512283873
x_{14}	-2.33005861684403	2.12841761393191
x_{15}	-2.33005870189375	2.12841853041582
x_{16}	-2.33005872800262	2.12841886759401
x_{17}	-2.33005873601761	2.12841899164321
x_{18}	-2.33005873847807	2.12841903728141
x_{19}	-2.33005873923340	2.12841905407188
x_{20}	-2.33005873946527	2.12841906024916
x_{21}	-2.33005873953645	2.12841906252181
x_{22}	-2.33005873955830	2.12841906335793
x_{23}	-2.33005873956501	2.12841906366554
x_{24}	-2.33005873956707	2.12841906377871
x_{25}	-2.33005873956770	2.12841906382034
x_{26}	-2.33005873956790	2.12841906383566
x_{27}	-2.33005873956796	2.12841906384130
x_{28}	-2.33005873956797	2.12841906384337
x_{29}	-2.33005873956798	2.12841906384413
x_{30}	-2.33005873956798	2.12841906384441
x_{31}		2.12841906384452
x_{32}		2.12841906384456
x_{33}		2.12841906384457
x_{34}		2.12841906384457
x_{35}		2.12841906384458
x_{36}		2.12841906384458

Poglejmo, kje nam izrek zagotavlja konvergenco pri tej iteracijski funkciji,

$$g'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-1)^2}}, \quad |g'(x)| < 1,$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-1)^2}}\right| &< 1, \\
\frac{1}{\sqrt[3]{(5x-1)^2}} &< \frac{3}{5}, \\
\frac{1}{(5x-1)^2} &< \left(\frac{3}{5}\right)^3, \\
\frac{1}{|5x-1|} &< \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}, \\
|5x-1| &> \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}}.
\end{aligned}$$

Za $x \geq \frac{1}{5}$ mora biti

$$5x - 1 > \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}} \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}}\right) \doteq 0.63033,$$

sicer pa

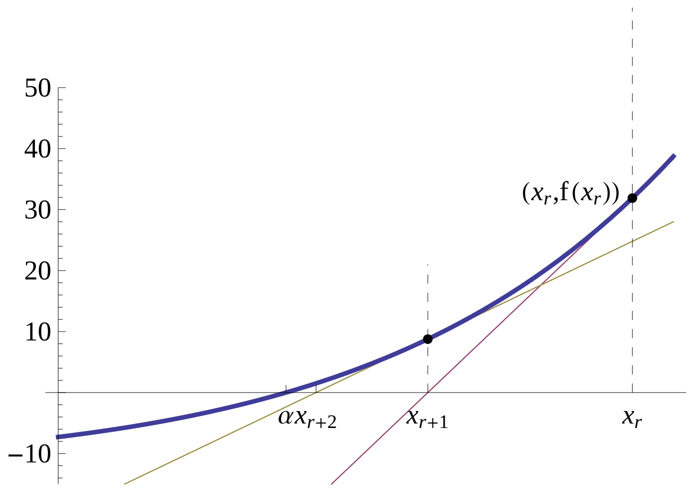
$$-5x + 1 > \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}} \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^3}}\right) \doteq -0.23033,$$

torej iteracija konvergira za vse $x \in (-\infty, -0.2303) \cup (0.6303, \infty)$. S to funkcijo lahko izračunamo preostali rešitvi enačbe.

3.3 Tangentna metoda

Iz približka x_r dobimo nov približek x_{r+1} kot presečišče tangente na krivuljo v točki $(x_r, f(x_r))$ z abscisno osjo (slika 3.1).
Enačba tangente na krivuljo v tej točki je

$$y - f(x_r) = f'(x_r)(x - x_r),$$



Slika 3.1: Grafična izpeljava tangentne metode.

iščemo pa presečišče z x osjo, točko $(x_{r+1}, 0)$. Torej mora veljati

$$0 - f(x_r) = f'(x_r)(x_{r+1} - x_r).$$

Nov približek iz starega dobimo kot

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}.$$

Opazimo še, da je tangentna metoda poseben primer navadne iteracije za iteracijsko funkcijo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Lastnosti tangentne metode:

- Vsaka ničla je privlačna točka ($|g'(\alpha)| < 1$ za vsako ničlo), torej jo lahko izračunamo z dovolj dobrim začetnim približkom.

- V bližini večkratne ničle ($f'(\alpha) = 0$) je konvergenca linearna.

- Če je α enostavna ničla, je $f'(\alpha) \neq 0$ in $g'(\alpha) = 0$, zato je konvergenca vsaj kvadratična.

- Če je α enostavna ničla in $f''(\alpha) = 0$, je konvergenca vsaj kubična.

3.3.1 Zgled

Iščemo rešitve enačbe

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0.$$

Natančni rešitvi sta $\alpha_1 = 1$ (dvojna ničla) in $\alpha_2 = -1$ (enostavna ničla). Izpeljimo tangentno metodo za ta primer. Tangentno metodo dobimo kot

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)},$$

v tem primeru torej

$$x_{r+1} = x_r - \frac{x_r^3 - x_r^2 - x_r + 1}{3x_r^2 - 2x_r - 1}.$$

Zdaj uporabimo iteracijsko funkcijo $g(x) = x - \frac{x^3-x^2-x+1}{3x^2-2x-1}$ v Octaveu in uporabimo program `iteracija` ([1]). Vpišemo ukaze

```
g = @(x) x - (x.^3 - x.^2 - x + 1)/(3*x.^2 - 2*x - 1)
iteracija(g,0.5,25)
iteracija(g,-0.5,9)
```

in za začetna približka $x_0 = 0.5$ in $x_0 = -0.5$ dobimo zaporedji približkov

x_0	0.500000000000000	-0.500000000000000
x_1	0.800000000000000	-2.000000000000000
x_2	0.905882352941176	-1.400000000000000
x_3	0.954132539091586	-1.100000000000000
x_4	0.977338616437368	-1.008695652173913
x_5	0.988734610384883	-1.000074640791193
x_6	0.994383303992375	-1.000000005570624
x_7	0.997195612087415	-1.000000000000000
x_8	0.998598791189703	-1.000000000000000
x_9	0.999299641276319	
x_{10}	0.999649881983167	
x_{11}	0.999824956318402	
x_{12}	0.999912481989770	
x_{13}	0.999956241952312	
x_{14}	0.999978121215269	
x_{15}	0.999989060667537	
x_{16}	0.999994530350836	
x_{17}	0.999997265177114	
x_{18}	0.999998632588296	
x_{19}	0.999999316282907	
x_{20}	0.999999658134565	
x_{21}	0.999999829036609	
x_{22}	0.999999914594049	
x_{23}	0.999999957166969	
x_{24}	0.999999978550793	

Začetni približek $x_0 = -0.5$ da mnogo hitrejšo konvergenco, saj je ničla -1 enostavna in je red konvergence kvadratičen. V splošnem pri kvadratični konvergenci v vsakem koraku dobimo približno dve novi točni števki, pri linearni konvergenci dobimo eno, pri kubični pa tri.

3.4 Laguerrova metoda

Iščemo rešitev enačbe $p(x) = 0$, kjer je p polinom stopnje n. Najprej izračunamo

$$\begin{aligned} s_1(x_r) &= \frac{p'(x_r)}{p(x_r)}, \\ s_2(x_r) &= -s_1'(x_r) = \frac{(p'(x_r))^2 - p(x_r)p''(x_r)}{(p(x_r))^2}. \end{aligned}$$

Nov približek dobimo z

$$x_{r+1} = x_r - \frac{n}{s_1(x_r) \pm \sqrt{(n-1)(ns_2(x_r) - s_1^2(x_r))}}, \tag{3.1}$$

kjer predznak izberemo tako, da je absolutna vrednost imenovalca največja. Konvergenca metode je v bližini enostavne ničle kubična, v bližini večkratne ničle pa linearna.

3.5 Naloge

1. Z bisekcijo poiščite približek za $\sqrt[3]{20}$. Naredite tri korake.

   Rešitev. Najprej izberemo funkcijo f, katere vrednosti je enostavno izračunati in ki ima ničlo $\sqrt[3]{20}$. Naj bo to funkcija

   $$f(x) = x^3 - 20.$$

   Zdaj poiščemo tak interval, da bo na robovih intervala funkcija f različno predznačena. Izberemo $[1, 4]$, torej $a = 1$, $b = 4$, in naredimo en korak bisekcije:
   1 $\quad f_a = -19$
   2 $\quad f_b = 44$
   3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$
   4 $\quad f_c = f(c) = -\frac{35}{8} = -4.375.$
   Vidimo, da je funkcija različno predznačena na robovih intervala $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{5}{2} = 2.5$, $b = 4$:
   1 $\quad f_a = -\frac{35}{8} = -4.375$
   2 $\quad f_b = 44$
   3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{13}{4} = 3.25$
   4 $\quad f_c = f(c) = \frac{917}{64} = 14.3281.$
   Funkcija je različno predznačena na robovih intervala $\left[\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{13}{4}$:
   1 $\quad f_a = -\frac{35}{8} = -4.375$
   2 $\quad f_b = \frac{917}{64} = 14.3281$
   3 $\quad c = \frac{a+b}{2} = \frac{23}{8} = 2.875$
   4 $\quad f_c = f(c) = \frac{1927}{512} = 3.7637.$
   Končali smo tretji korak bisekcije in vrnemo približek med a in c

   $$c = \frac{\frac{5}{2} + \frac{23}{8}}{2} \doteq 2.6875.$$

2. Z bisekcijo poiščite približek za $\sqrt{2}$ na dve decimalki natančno.

Rešitev. Najprej izberemo funkcijo f, katere vrednosti je enostavno izračunati in ki ima ničlo $\sqrt{2}$. Naj bo to funkcija

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Zdaj poiščemo tak interval, da bo na robovih intervala funkcija f različno predznačena. Izberemo $[1, 2]$, torej $a = 1$, $b = 2$, in naredimo en korak bisekcije:

1 $f_a = -1$
2 $f_b = 2$
3 $c = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$
4 $f_c = f(c) = \frac{1}{4} = 0.25.$

Vidimo, da je funkcija različno predznačena na robovih intervala $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$:

1 $f_a = -1$
2 $f_b = \frac{1}{4} = 0.25$
3 $c = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$
4 $f_c = f(c) = -\frac{7}{16} = -0.4375.$

Funkcija je različno predznačena na robovih intervala $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$, torej je v naslednjem koraku bisekcije $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{3}{2}$:

1 $f_a = -\frac{7}{16} = -0.4375$
2 $f_b = \frac{1}{4} = 0.25$
3 $c = \frac{a+b}{2} = \frac{11}{8} = 1.375$
4 $f_c = f(c) = -\frac{7}{64} = -0.1094.$

V naslednjem koraku sta $a = \frac{11}{8}$ in $b = \frac{3}{2}$:

1 $f_a = -\frac{7}{64} = -0.1094$
2 $f_b = \frac{1}{4} = 0.25$
3 $c = \frac{a+b}{2} = \frac{23}{16} = 1.4375$
4 $f_c = f(c) = \frac{17}{256} = 0.0664.$

Zdaj sta $a = \frac{11}{8}$ in $b = \frac{23}{16}$:

1 $f_a = -\frac{7}{64} = -0.1094$
2 $f_b = \frac{17}{256} = 0.0664$
3 $c = \frac{a+b}{2} = \frac{45}{32} = 1.4063$
4 $f_c = f(c) = -\frac{23}{1024} = -0.0225.$

Razlika med a in b je enaka $a-b = 0.0625 < 0.1$, torej je zadnji približek $c \doteq 1.40625$ natančen na eno decimalko. Postopek nadaljujemo, dokler ni razlika med a in b manjša od 0.01 in dobimo približek $c \doteq 1.41797$, natančen na dve decimalki.

3. Z uporabo programa `bisekcija` ([1]) poiščite približek za ničlo funkcije

$$f(x) = e^{-x}(3.2 \sin x - 0.5 \cos x)$$

na tri decimalke natančno.

Rešitev. Iščemo interval, na katerem je funkcija f različno predznačena. Določimo ga lahko s poskušanjem ali iz grafa funkcije. Definirajmo funkcijo z `f = @(x) exp(-x)*(3.2*sin(x) - 0.5*cos(x))` in poskusimo `f(3)` in `f(4)`. Lahko izberemo interval $[3, 4]$ in poženemo program z ukazom `bisekcija(f, 3, 4, 0.001)`. Približek za ničlo funkcije f je 3.2964.

4. Ali konvergenčni izrek zagotavlja konvergenco zaporedja

$$x_{r+1} = \frac{1}{10}\left(1 + x_r^5\right),$$

če izberemo začetni približek $x_0 = 0$? Kolikšen je red konvergence?

Rešitev. Izračunajmo odvod iteracijske funkcije $g(x) = \frac{1}{10}(1 + x^5)$,

$$g'(x) = \frac{1}{10} \cdot 5x^4 = \frac{1}{2}x^4,$$

in vstavimo vrednost $x = 0$. Ker je $g'(0) = 0 < 1$, imamo konvergenco v okolici $x_0 = 0$. Da dobimo red konvergence, spet odvajamo,

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2x^3,\ g''(0) = 0, \\ g'''(x) &= 6x^2,\ g'''(0) = 0, \\ g^{(4)}(x) &= 12x,\ g^{(4)}(0) = 0, \\ g^{(5)}(x) &= 12,\ g^{(5)}(0) = 12 \neq 0, \end{aligned}$$

torej je red konvergence enak 5.

5. Poiščite rešitve danih enačb in ugotovite red konvergence iteracije:

   (a) $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$, izračunajte še interval konvergence z uporabo konvergenčnega izreka,

   (b) $x = \dfrac{x(x^2 + 12)}{3x^2 + 4}$,

   (c) $x = \dfrac{x(1 - \ln x)}{1 + x}$.

Rešitev.

(a) Najprej izračunajmo rešitve enačbe,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right), \\ 2x &= x + \frac{4}{x}, \\ x - \frac{4}{x} &= 0, \\ x^2 - 4 &= 0, \\ (x-2)(x+2) &= 0, \end{aligned}$$

rešitvi sta torej $\alpha_{1,2} = \pm 2$.
Odvajajmo iteracijsko funkcijo $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right).$$

V enačbo vstavimo ± 2 in dobimo

$$g'(\pm 2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{4}\right) = 0.$$

Še enkrat odvajajmo,

$$g''(x) = \frac{1}{2}(-4)(-2x^{-3}) = 4x^{-3},$$

vstavimo ± 2 in vidimo

$$g''(\pm 2) = \pm\frac{1}{2} \neq 0,$$

torej je konvergenca kvadratična (red je 2).
Poglejmo še, kje je $|g'(x)| < 1$ (po konvergenčnem izreku za take začetne približke x iteracijsko zaporedje konvergira),

$$\begin{aligned} |g'(x)| &< 1, \\ \left|\frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)\right| &< 1, \\ \left|1 - \frac{4}{x^2}\right| &< 2. \end{aligned}$$

i. Najprej izračunajmo, kje je izraz pod absolutno vrednostjo nenegativen,

$$\begin{aligned}
1 - \frac{4}{x^2} &\geq 0,\\
-\frac{4}{x^2} &\geq -1,\\
\frac{4}{x^2} &\leq 1,\\
4 &\leq x^2,\\
|x| &\geq 2.
\end{aligned}$$

V tem primeru dobimo naslednjo neenačbo

$$\begin{aligned}
1 - \frac{4}{x^2} &< 2,\\
-\frac{4}{x^2} &< 1,\\
\frac{4}{x^2} &> -1,\\
4 &> -x^2,\\
-4 &< x^2,
\end{aligned}$$

ki je vedno izpolnjena. Rešitev je $|x| \geq 2$.

ii. V primeru, ko je izraz pod absolutno vrednostjo negativen (tj. za $|x| < 2$), dobimo

$$\begin{aligned}
-1 + \frac{4}{x^2} &< 2,\\
\frac{4}{x^2} &< 3,\\
4 &< 3x^2,\\
\frac{4}{3} &< x^2,\\
|x| &> \frac{2}{\sqrt{3}},\\
|x| &> \frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq 1.1547.
\end{aligned}$$

Rešitev je torej $\frac{2\sqrt{3}}{3} < |x| < 2$.

Iteracijsko zaporedje zagotovo konvergira za začetne približke

$$x \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right).$$

Če rešitev testiramo v Octaveu, vidimo, da iteracija res konvergira k točkama ± 2, odvisno od začetnega približka. Če vzamemo začetni približek blizu 0, vidimo, da iteracija ne konvergira. Poskusite z zaporedjem ukazov

```
g = @(x) 1/2*(x+4/x)
iteracija(g,1,10)
iteracija(g,-1,10)
iteracija(g,10^(-10),10)
```

(b) Izračunajmo rešitve enačbe,

$$\begin{aligned} x &= \frac{x(x^2+12)}{3x^2+4}, \\ x(3x^2+4) &= x(x^2+12), \\ x(3x^2+4-x^2-12) &= 0, \\ x(2x^2-8) &= 0, \\ 2x(x^2-4) &= 0, \\ 2x(x-2)(x+2) &= 0, \end{aligned}$$

torej so rešitve $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -2$.

Odvajajmo iteracijsko funkcijo $g(x) = \dfrac{x(x^2+12)}{3x^2+4}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\left((x^2+12) + x\cdot(2x)\right)(3x^2+4) - x(x^2+12)\cdot 6x}{(3x^2+4)^2} \\ &= \frac{(3x^2+12)(3x^2+4) - 6x^4 - 12\cdot 6x^2}{(3x^2+4)^2} \\ &= \frac{9x^4 + 12x^2 + 12\cdot 3x^2 + 4\cdot 12 - 6x^4 - 12\cdot 6x^2}{(3x^2+4)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 24x^2 + 48}{(3x^2+4)^2} \\ &= \frac{3(x^2-4)^2}{(3x^2+4)^2} \\ &= \frac{3(x-2)^2(x+2)^2}{(3x^2+4)^2} \end{aligned}$$

in poglejmo vrednosti odvoda v rešitvah enačbe,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{3\cdot 4\cdot 4}{16} = 3 \geq 1 \Rightarrow \text{ ni konvergence v okolici točke 0}, \\ g'(2) &= 0 \Rightarrow \text{ imamo vsaj kvadratično konvergenco v okolici 2}, \\ g'(-2) &= 0 \Rightarrow \text{ imamo vsaj kvadratično konvergenco v okolici -2}. \end{aligned}$$

Še enkrat odvajajmo,

$$g''(x) = \frac{(3 \cdot 2(x-2)(x+2)^2 + 3 \cdot (x-2)^2 \cdot 2(x+2)) \cdot (3x^2+4)^2 -}{(3x^2+4)^4}$$
$$\underline{-3(x-2)^2(x+2)^2 \cdot 2(3x^2+4) \cdot 6x}$$

$$= \frac{6(x-2)(x+2)(x+2+x-2) \cdot (3x^2+4)^2 -}{(3x^2+4)^4}$$
$$\underline{-36x(x-2)^2(x+2)^2(3x^2+4)}$$

$$= \frac{12x(x-2)(x+2)(3x^2+4)(3x^2+4-3(x-2)(x+2))}{(3x^2+4)^4}$$
$$= \frac{12x(x-2)(x+2)(3x^2+4-3(x^2-4))}{(3x^2+4)^3}$$
$$= \frac{12x(x-2)(x+2) \cdot 16}{(3x^2+4)^3}$$
$$= \frac{192x(x-2)(x+2)}{(3x^2+4)^3},$$

torej velja

$$g''(\pm 2) = 0 \Rightarrow \text{ vsaj kubična konvergenca v okolici } \pm 2.$$

Uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = (x-2)(x+2)$, torej je $h_1'(x) = x+2+x-2 = 2x$, in

$$\begin{aligned} g'''(\pm 2) &= h_1'(\pm 2)h_2(\pm 2) + h_1(\pm 2)h_2'(\pm 2) \\ &= h_1'(\pm 2)h_2(\pm 2) + 0 \\ &= \frac{192 \cdot (\pm 2)}{(3 \cdot 4 + 4)^3} \cdot (\pm 4) \\ &= \frac{192 \cdot 8}{16^3} = \frac{3}{8} \neq 0, \end{aligned}$$

zato je konvergenca kubična v okolici ± 2 (red je 3).

(c) Poiščimo rešitve enačbe,

$$\begin{aligned} x &= \frac{x(1-\ln x)}{1+x}, \\ x(1+x) &= x(1-\ln x), \\ x + x^2 &= x - x\ln x, \\ x^2 + x\ln x &= 0, \\ x(x+\ln x) &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi enačbe sta $\alpha_1 = 0$ in število α_2, za katerega velja $\alpha_2 + \ln\alpha_2 = 0$, tj. $\alpha_2 \doteq 0.5671$. Rešitev α_1 ni smiselna, saj $\ln 0$ ne obstaja. Odvajajmo funkcijo $g(x) = \dfrac{x(1-\ln x)}{1+x}$,

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\left((1-\ln x) + x(-\frac{1}{x})\right)(1+x) - x(1-\ln x)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{-\ln x(1+x) - x(1-\ln x)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{-\ln x - x\ln x - x + x\ln x}{(1+x)^2} \\
&= -\frac{x+\ln x}{(1+x)^2}.
\end{aligned}
$$

Vstavimo točko α_2 in dobimo $g'(\alpha_2) = 0$, saj je $\alpha_2 + \ln\alpha_2 = 0$, ker je α_2 rešitev enačbe. Uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = x + \ln x$, torej dobimo $h_1'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, in

$$
\begin{aligned}
g''(\alpha_2) &= -\frac{1}{(1+\alpha_2)^2}\left(1 + \frac{1}{\alpha_2}\right) \\
&= -\frac{1+\alpha_2}{\alpha_2(1+\alpha_2)^2} \\
&= -\frac{1}{\alpha_2(1+\alpha_2)} \neq 0,
\end{aligned}
$$

zato imamo kvadratično konvergenco (red je 2).

6. Rešujemo enačbo $e^x = \frac{1}{x}$. Izračunajte red konvergence iteracije

$$
x_{r+1} = \frac{x_r(1+x_r)}{1+2x_r+\ln x_r}.
$$

Rešitev. Najprej poglejmo, kako dobimo iteracijsko funkcijo,

$$\begin{aligned}
e^x &= \frac{1}{x}, \\
x &= \ln\frac{1}{x}, \\
x &= -\ln x, \\
-x &= \ln x, \\
x &= 2x + \ln x, \\
1 + x &= 1 + 2x + \ln x, \\
\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{1+2x+\ln x}, \\
\frac{x}{1+x} &= \frac{x}{1+2x+\ln x}, \\
x &= \frac{x(1+x)}{1+2x+\ln x}.
\end{aligned}$$

Odvajajmo iteracijsko funkcijo $g(x) = \dfrac{x(1+x)}{1+2x+\ln x}$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{((1+x)+x)(1+2x+\ln x) - x(1+x)(2+\frac{1}{x})}{(1+2x+\ln x)^2} \\
&= \frac{(1+2x)(1+2x+\ln x) - (1+x)(2x+1)}{(1+2x+\ln x)^2} \\
&= \frac{(1+2x)(1+2x+\ln x - 1 - x)}{(1+2x+\ln x)^2} \\
&= \frac{(1+2x)(x+\ln x)}{(1+2x+\ln x)^2}.
\end{aligned}$$

Označimo rešitev enačbe z α. Torej velja

$$\begin{aligned}
e^\alpha &= \frac{1}{\alpha}, \\
\alpha &= \ln\frac{1}{\alpha}, \\
\alpha &= -\ln\alpha, \\
\alpha + \ln\alpha &= 0,
\end{aligned}$$

kar uporabimo, ko α vstavimo v enačbo za odvod,

$$g'(\alpha) = \frac{(1+2\alpha)(\alpha+\ln\alpha)}{(1+2\alpha+\ln\alpha)^2} = 0.$$

Uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = x + \ln x$, sledi $h_1'(x) = 1 + \frac{1}{x}$, in

$$\begin{aligned} g''(\alpha) &= \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{1+2\alpha}{(1+2\alpha+\ln\alpha)^2} \\ &= \frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1+2\alpha}{(1+\alpha)^2} \\ &= \frac{1+2\alpha}{\alpha(1+\alpha)} \neq 0, \end{aligned}$$

ker $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ (vstavimo v enačbo in vidimo, da $e^{-1/2} \neq -2$). Torej je red konvergence enak 2.

7. V enačbi $x^2 + \ln x + a = 0$ je a določen tako, da je rešitev enačbe enaka $\alpha = \frac{1}{2}$. Enačbo lahko zapišemo v obliki $x = g(x)$, kjer je g ena od danih funkcij:

   (a) $g_1(x) = \sqrt{-\ln x - a}$,

   (b) $g_2(x) = e^{-(a+x^2)}$,

   (c) $g_3(x) = \frac{1}{3}\left(x + 2e^{-(a+x^2)}\right)$.

   Izpeljite dano iteracijsko funkcijo in raziščite konvergenco zaporedja približkov $x_{r+1} = g(x_r)$ pri poljubnem začetnem približku.

   Rešitev.

   (a) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo,

   $$\begin{aligned} x^2 &= -\ln x - a, \\ x &= \sqrt{-\ln x - a}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

   Odvajajmo g_1,

   $$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{-\ln x - a}} \\ &= \frac{-1}{2x\sqrt{-\ln x - a}} \end{aligned}$$

   in preverimo, ali je $|g_1'(\alpha)| < 1$, kjer je $\alpha = \frac{1}{2}$ rešitev enačbe. Pri tem uporabimo enakost $\alpha^2 = -\ln\alpha - a$, ki sledi iz enačbe (3.2). Ocenimo odvod v α,

$$
\begin{aligned}
|g_1'(\alpha)| &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{-\ln\alpha - a}} \\
&= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha^2}} \\
&= \frac{1}{2\alpha|\alpha|} \\
&= \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \\
&= 2 > 1.
\end{aligned}
$$

Iteracijsko zaporedje ne konvergira.

(b) Izpeljimo iteracijsko funkcijo,

$$
\begin{aligned}
x^2 + \ln x + a = 0&, \\
\ln x &= -(x^2 + a), \\
x &= e^{-(x^2+a)}.
\end{aligned}
$$

Odvajajmo g_2,

$$g_2'(x) = e^{-(x^2+a)} \cdot (-2x)$$

in poglejmo vrednost v $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$|g_2'(\alpha)| = |e^{\ln\alpha}| \cdot |-2\alpha| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

kjer smo spet uporabili, da je α rešitev enačbe in zato velja $\alpha^2 + \ln\alpha + a = 0 \Rightarrow \ln\alpha = -(\alpha^2 + a)$. Po konvergenčnem izreku sledi, da zaporedje konvergira.

(c) Izpeljimo iteracijsko funkcijo, uporabimo točko 7b,

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-(x^2+a)}, \\
2x &= 2e^{-(x^2+a)}, \\
x + 2x &= x + 2e^{-(x^2+a)}, \\
3x &= x + 2e^{-(x^2+a)}, \\
x &= \frac{1}{3}\left(x + 2e^{-(x^2+a)}\right).
\end{aligned}
$$

Odvajajmo g_3,

$$g_3'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - 4xe^{-(x^2+a)}\right)$$

in vstavimo $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$|g_3'(\alpha)| = \left|\frac{1}{3}\left(1 - 4\alpha \cdot \alpha\right)\right| = \left|\frac{1}{3}(1 - 4\alpha^2)\right| = 0,$$

torej ima metoda vsaj kvadratično konvergenco.

Izračunajmo še drugi odvod,

$$\begin{aligned} g_3''(x) &= \frac{1}{3}\left(-4e^{-(x^2+a)} - 4xe^{-(x^2+a)} \cdot (-2x)\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4e^{-(x^2+a)}(2x^2 - 1), \end{aligned}$$

in vstavimo $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$|g_3''(\alpha)| = \frac{4}{3} \cdot \alpha \cdot (2\alpha^2 - 1) = -\frac{1}{3} \neq 0,$$

torej je metoda reda 2.

8. Iščemo rešitve enačbe $x^2 + \ln x = 0$ (rešitev je $\alpha \doteq 0.653$). Raziščite konvergenco zaporedja približkov v bližini rešitve, če uporabite naslednje iteracijske funkcije, ki jih tudi izpeljite:

   (a) $g_1(x) = \sqrt{-\ln x}$,

   (b) $g_2(x) = e^{-x^2}$,

   (c) $g_3(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x^2})$,

   (d) $g_4(x) = \dfrac{2x^3 + e^{-x^2}}{1 + 2x^2}$.

   Rešitev.

   (a) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo. Začnemo s funkcijo f in izrazimo spremenljivko x,

   $$\begin{aligned} x^2 + \ln x &= 0, \\ x^2 &= -\ln x, \\ x &= \sqrt{-\ln x}. \end{aligned}$$

   Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_1(x) = \sqrt{-\ln x}$,

   $$\begin{aligned} g_1'(x) &= \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{-\ln x}} \\ &= \frac{-1}{2x\sqrt{-\ln x}} \end{aligned}$$

in vstavimo vrednost α,

$$|g_1'(\alpha)| = \left|\frac{-1}{2\alpha\sqrt{-\ln\alpha}}\right| = \frac{1}{2\alpha^2} = 1.173 \geq 1,$$

kjer smo upoštevali $\alpha = g_1(\alpha) = \sqrt{-\ln\alpha}$. Ker je vrednost odvoda v točki α večja od 1, po izreku sledi, da zaporedje ne konvergira, torej ta metoda ni dobra.

(b) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo,

$$\begin{aligned} x^2 + \ln x &= 0, \\ \ln x &= -x^2, \\ x &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_2(x) = e^{-x^2}$,

$$g_2'(x) = -2xe^{-x^2},$$

in vstavimo α,

$$|g_2'(\alpha)| = |-2\alpha e^{-\alpha^2}| = 2\alpha^2 = 0.853 < 1,$$

kjer smo upoštevali $\alpha = g_2(\alpha) = e^{-\alpha^2}$. Ker je vrednost odvoda v točki α manjša od 1, zaporedje po izreku konvergira, vendar pa je konvergenca počasna, saj je vrednost odvoda blizu 1.

(c) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo, uporabimo še točko 8b,

$$\begin{aligned} x &= e^{-x^2}, \\ 2x &= x + e^{-x^2}, \\ x &= \frac{1}{2}(x + e^{-x^2}). \end{aligned}$$

Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_3(x) = \frac{1}{2}(x + e^{-x^2})$,

$$g_3'(x) = \frac{1}{2}(1 - 2xe^{-x^2}).$$

Vstavimo α,

$$|g_3'(\alpha)| = |\frac{1}{2}(1 - 2\alpha e^{-\alpha^2})| = |\frac{1}{2}(1 - 2\alpha^2)| = 0.074 < 1.$$

Po izreku zaporedje konvergira. Konvergenca je boljša, saj je vrednost odvoda zelo majhna.

(d) Najprej izpeljimo iteracijsko funkcijo, uporabimo še točko 8b,

$$
\begin{aligned}
x &= e^{-x^2}, \\
2x^3 + x &= 2x^3 + e^{-x^2}, \\
x(2x^2+1) &= 2x^3 + e^{-x^2}, \\
x &= \frac{2x^3 + e^{-x^2}}{2x^2+1}.
\end{aligned}
$$

Oglejmo si konvergenco zaporedja. Izračunajmo odvod funkcije $g_4(x) = \dfrac{2x^3 + e^{-x^2}}{1+2x^2}$,

$$
\begin{aligned}
g_4'(x) &= \frac{(2\cdot 3x^2 - 2xe^{-x^2})(1+2x^2) - (2x^3 + e^{-x^2})\cdot 2\cdot 2x}{(1+2x^2)^2} \\
&= \frac{6x^2 + 6x^2\cdot 2x^2 - 2xe^{-x^2} - 4x^3e^{-x^2} - 4x\cdot 2x^3 - 4x\cdot e^{-x^2}}{(1+2x^2)^2} \\
&= \frac{4x^4 - 4x^3e^{-x^2} + 6x^2 - 6xe^{-x^2}}{(1+2x^2)^2} \\
&= \frac{4x^3(x-e^{-x^2}) + 6x(x-e^{-x^2})}{(1+2x^2)^2} \\
&= \frac{(x-e^{-x^2})(4x^3+6x)}{(1+2x^2)^2} \\
&= \frac{2x(2x^2+3)(x-e^{-x^2})}{(1+2x^2)^2},
\end{aligned}
$$

in vstavimo α. Iz točke 8b sledi $e^{-\alpha^2} = \alpha$, kar uporabimo v računu,

$$
|g_4'(\alpha)| = 0.
$$

Ta metoda nam je najbolj všeč, saj je odvod v α enak 0. Izračunajmo še drugi odvod (uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = x - e^{-x^2}$). Dobimo

$$
\begin{aligned}
g_4''(\alpha) &= \left(1 - e^{-\alpha^2}\cdot(-2\alpha)\right)\frac{2\alpha(2\alpha^2+3)}{(1+2\alpha^2)^2} \\
&= \frac{(1+2\alpha^2)\cdot 2\alpha(2\alpha^2+3)}{(1+2\alpha^2)^2} \\
&= \frac{2\alpha(2\alpha^2+3)}{1+2\alpha^2} = 2.716 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Torej ima po izreku metoda kvadratično konvergenco (ima red 2), kar pomeni, da konvergira hitreje od ostalih.

9. Pokažite, da lahko kvadratni koren pozitivnega števila a računamo iterativno z $x_{r+1} = x_r \dfrac{x_r^2 + 3a}{3x_r^2 + a}$. Določite red konvergence v bližini $\sqrt{a}$ in pokažite, da je metoda konvergentna za poljuben začetni približek večji od 0.

Rešitev. Najprej preverimo, da je iterativna funkcija $g(x) = x \dfrac{x^2 + 3a}{3x^2 + a}$ res dobra za računanje kvadratnega korena,

$$g(\pm\sqrt{a}) = \pm\sqrt{a}\, \frac{a + 3a}{3a + a} = \pm\sqrt{a},$$

dodatna negibna točka je še 0.

Oglejmo si red konvergence. Zato izračunajmo odvod funkcije g v točki $\sqrt{a}$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{x^2 + 3a}{3x^2 + a} + x\, \frac{2x(3x^2 + a) - (x^2 + 3a) \cdot 6x}{(3x^2 + a)^2} \\
&= \frac{(x^2 + 3a)(3x^2 + a)}{(3x^2 + a)^2} + \frac{6x^4 + 2ax^2 - 6x^4 - 18ax^2}{(3x^2 + a)^2} \\
&= \frac{3x^4 + 9ax^2 + ax^2 + 3a^2 + 2ax^2 - 18ax^2}{(3x^2 + a)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 6ax^2 + 3a^2}{(3x^2 + a)^2} \\
&= \frac{3(x^4 - 2ax^2 + a^2)}{(3x^2 + a)^2} \\
&= \frac{3(x^2 - a)^2}{(3x^2 + a)^2} \;\Rightarrow\; g'(\sqrt{a}) = 0.
\end{aligned}$$

Izračunajmo še drugi odvod,

$$\begin{aligned}
g''(x) &= 3\, \frac{2(x^2 - a) \cdot 2x(3x^2 + a)^2 - (x^2 - a)^2 \cdot 2(3x^2 + a) \cdot 6x}{(3x^2 + a)^4} \\
&= 3\, \frac{(3x^2 + a)(x^2 - a)\left((12x^3 + 4ax) - (12x^3 - 12ax)\right)}{(3x^2 + a)^4} \\
&= 3\, \frac{(x^2 - a) \cdot 16ax}{(3x^2 + a)^3} \\
&= 48ax\, \frac{x^2 - a}{(3x^2 + a)^3} \;\Rightarrow\; g''(\sqrt{a}) = 0.
\end{aligned}$$

Zdaj pri tretjem odvodu uporabimo trik s funkcijo $h_1(x) = x^2 - a$,

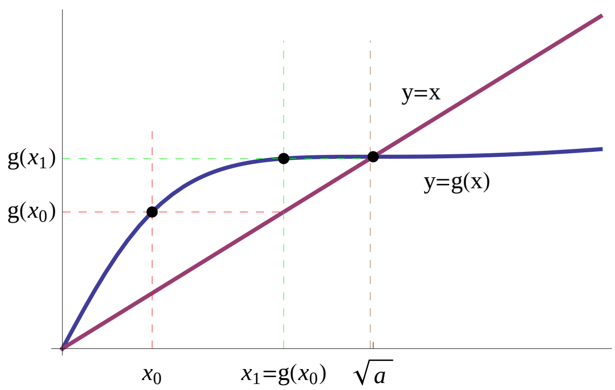
$$\begin{aligned} g'''(\sqrt{a}) &= \frac{48a\sqrt{a}}{(3a+a)^3} \cdot (2\sqrt{a}) \\ &= \frac{2 \cdot 48a^2}{64a^3} \\ &= \frac{3}{2a} \neq 0. \end{aligned}$$

Od tod sledi, da je konvergenca kubična (metoda je reda 3).

Pokazati hočemo še, da je metoda konvergentna za vsak začetni približek večji od 0. Dokažimo, da velja (pri predpostavkah si pomagamo s sliko 3.2),

(a) $\sqrt{a} \geq x_{r+1} \geq x_r$, $x_0 \in (0, \sqrt{a}]$, v tem primeru dobimo naraščajoče navzgor omejeno zaporedje, torej je konvergentno.

(b) $\sqrt{a} \leq x_{r+1} \leq x_r$, $x_0 \in (\sqrt{a}, \infty)$, v tem primeru dobimo padajoče navzdol omejeno zaporedje, torej je konvergentno.



Slika 3.2: Iteracija za $x_0 < \sqrt{a}$.

Najprej dokažimo desni neenakosti. Izračunajmo

$$\begin{aligned} g(x) - x &= x\,\frac{x^2+3a}{3x^2+a} - x \\ &= x\,\frac{x^2+3a-3x^2-a}{3x^2+a} \\ &= x\,\frac{-2x^2+2a}{3x^2+a} \\ &= 2x\,\frac{a-x^2}{3x^2+a}. \end{aligned}$$

Od tod za $x_0 < \sqrt{a}$ sledi $g(x_0) - x_0 = x_1 - x_0 > 0$, torej $x_1 > x_0$ in po indukciji sledi, da je zaporedje naraščajoče. Za $x_0 > \sqrt{a}$ dobimo $x_1 < x_0$, torej je po indukciji zaporedje padajoče.

Dokažimo še levi neenakosti:

$$\begin{aligned} g(x) - \sqrt{a} &= x\,\frac{x^2+3a}{3x^2+a} - \sqrt{a} \\ &= \frac{x^3 + 3ax - 3\sqrt{a}x^2 - a\sqrt{a}}{3x^2+a} \\ &= \frac{x^3 - 3x^2\sqrt{a} + 3x\sqrt{a^2} - \sqrt{a^3}}{3x^2+a} \\ &= \frac{(x-\sqrt{a})^3}{3x^2+a}, \end{aligned}$$

od koder za $x_0 < \sqrt{a}$ sledi $x_1 < \sqrt{a}$, za $x_0 > \sqrt{a}$ pa je $x_1 > \sqrt{a}$. Torej zaporedje konvergira za vsak $x_0 > 0$.

10. Rešujemo enačbo $x - \sqrt{1+x} = 0$. Ali iteracija

$$x_{r+1} = \sqrt{1+x_r}$$

konvergira k rešitvi, če izberemo x_0 dovolj blizu rešitve?

Za katere vrednosti c iteracija

$$x_{r+1} = x_r - c(x_r^2 - x_r - 1)$$

konvergira k rešitvi, če je x_0 dovolj blizu rešitve?

Rešitev. Izračunajmo rešitvi,

$$\begin{aligned} x - \sqrt{1+x} &= 0, \\ \sqrt{1+x} &= x, \\ 1 + x &= x^2, \\ x^2 - x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

in dobimo

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ker sta $\alpha_{1,2}$ rešitvi osnovne enačbe, velja tudi

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{1 + \alpha_{1,2}}. \tag{3.3}$$

Izračunajmo odvod iteracijske funkcije $g(x) = \sqrt{1+x}$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

in poglejmo vrednost v rešitvah $\alpha_{1,2}$, kjer uporabimo (3.3),

$$|g'(\alpha_{1,2})| = \left|\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha_{1,2}}}\right| = \left|\frac{1}{2\alpha_{1,2}}\right| = \frac{1}{|1 \pm \sqrt{5}|} < 1,$$

torej iteracija konvergira.

Rešimo še drugi del naloge. Odvajajmo novo iteracijsko funkcijo $g(x) = x - c(x^2 - x - 1)$,

$$g'(x) = 1 - c(2x - 1).$$

Zanima nas, za katere vrednosti c je v okolici $\alpha_{1,2}$ odvod $|g'(x)| < 1$.

Najprej poglejmo za α_1,

$$|g'(\alpha_1)| = |1 - c(1 + \sqrt{5} - 1)| = |1 - c\sqrt{5}| < 1.$$

Izraz pod absolutno vrednostjo je nenegativen za $c \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, kjer dobimo neenačbo

$$1 - c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c > 0.$$

V nasprotnem primeru dobimo

$$-1 + c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c < \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

torej v okolici $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ iteracija konvergira za $c \in (0, \frac{2\sqrt{5}}{5})$.

Oglejmo si še okolico α_2,

$$|g'(\alpha_2)| = |1 - c(1 - \sqrt{5} - 1)| = |1 + c\sqrt{5}| < 1.$$

Izraz pod absolutno vrednostjo je nenegativen za $c \geq -\frac{1}{\sqrt{5}}$, kjer je rešitev neenačbe

$$1 + c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c < 0,$$

v nasprotnem primeru pa dobimo

$$-1 - c\sqrt{5} < 1 \Rightarrow c > -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Torej iteracija v okolici $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ konvergira za $c \in (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0)$.

11. V iteracijski formuli
$$x_{r+1}=\frac{A^2}{x_r^5}\left(\alpha+\beta\frac{x_r^3}{A}+\gamma\frac{x_r^6}{A^2}\right)$$
za računanje $\sqrt[3]{A}$ določite parametre α, β, γ, tako da bo konvergenca vsaj kubična. Kakšen je red konvergence?

Rešitev. Da bo iteracija konvergirala k $\sqrt[3]{A}$ in bo konvergenca vsaj kubična, mora veljati
$$\begin{aligned} g(\sqrt[3]{A}) &= \sqrt[3]{A}, \\ g'(\sqrt[3]{A}) &= 0, \\ g''(\sqrt[3]{A}) &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$
kjer je g iteracijska funkcija
$$g(x)=A^2\alpha x^{-5}+A\beta x^{-2}+\gamma x.$$
Izračunajmo odvoda,
$$\begin{aligned} g'(x) &= -5A^2\alpha x^{-6}-2A\beta x^{-3}+\gamma, \\ g''(x) &= 30A^2\alpha x^{-7}+6A\beta x^{-4}. \end{aligned}$$
Zdaj vstavimo $\sqrt[3]{A}$ in iz (3.4) dobimo tri pogoje. Prvi pogoj je
$$\begin{aligned} g(\sqrt[3]{A}) = A^2\cdot A^{-\frac{5}{3}}\alpha + A\cdot A^{-\frac{2}{3}}\beta + A^{\frac{1}{3}}\gamma &= A^{\frac{1}{3}}, \\ A^{\frac{1}{3}}\alpha + A^{\frac{1}{3}}\beta + A^{\frac{1}{3}}\gamma &= A^{\frac{1}{3}}, \\ \alpha+\beta+\gamma &= 1, \end{aligned}$$
drugi
$$\begin{aligned} g'(\sqrt[3]{A}) = -5A^2\alpha\cdot A^{-2} - 2A\beta\cdot A^{-1}+\gamma &= 0, \\ -5\alpha-2\beta+\gamma &= 0, \end{aligned}$$
tretji pa
$$\begin{aligned} g''(\sqrt[3]{A}) = 30A^2\alpha A^{-\frac{7}{3}} + 6A\beta A^{-\frac{4}{3}} &= 0, \\ 30\alpha A^{-\frac{1}{3}} + 6\beta A^{-\frac{1}{3}} &= 0, \\ 5\alpha+\beta &= 0. \end{aligned}$$

Tako dobimo naslednji sistem za α, β in γ,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 1, \\ -5\alpha - 2\beta + \gamma &= 0, \\ 5\alpha + \beta &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo

$$\gamma = 5\alpha + 2\beta, \tag{3.5}$$

kar uporabimo v preostalih dveh enačbah, da dobimo nov sistem,

$$\begin{aligned} 6\alpha + 3\beta &= 1, \\ 5\alpha + \beta &= 0. \end{aligned}$$

Od tod iz druge enačbe dobimo

$$\beta = -5\alpha, \tag{3.6}$$

kar vstavimo v prvo enačbo. Izračunamo $\alpha = -\frac{1}{9}$, iz (3.6) dobimo $\beta = \frac{5}{9}$, iz (3.5) pa še $\gamma = \frac{5}{9}$.

Za red konvergence izračunamo tretji odvod funkcije g in vstavimo $\sqrt[3]{A}$,

$$\begin{aligned} g'''(x) &= 30A^2\alpha(-7x^{-8}) + 6A\beta(-4x^{-5}), \\ g'''(\sqrt[3]{A}) &= -210A^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot A^{-\frac{8}{3}} - 24A \cdot \frac{5}{9} \cdot A^{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{70}{3}A^{-\frac{2}{3}} - \frac{40}{3}A^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{10}{\sqrt[3]{A^2}} \neq 0, \end{aligned}$$

torej je konvergenca kubična (reda 3).

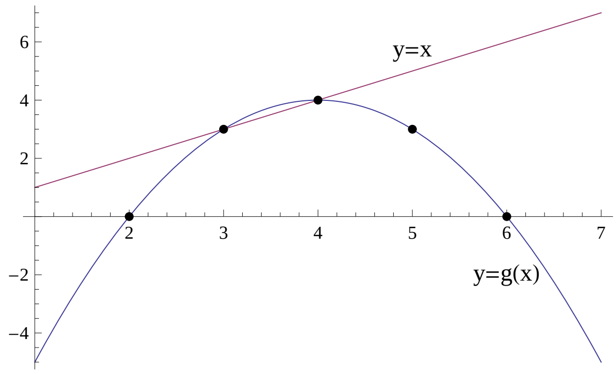
12. Za katere začetne približke je iteracija $x_{r+1} = g(x_r)$ konvergentna, če je $g(x) = 8x - 12 - x^2$? Kam konvergirajo ta zaporedja in kolikšen je red konvergence? Kje zagotavlja konvergenco konvergenčni izrek?

Rešitev. Izračunajmo negibne točke funkcije g,

$$\begin{aligned} x &= g(x), \\ x &= 8x - 12 - x^2, \\ x^2 - 7x + 12 &= 0, \\ \alpha_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2}, \\ \alpha_1 = 3,\ \alpha_2 &= 4, \end{aligned}$$

in njene ničle,

$$
\begin{aligned}
-x^2+8x-12&=0,\\
x^2-8x+12&=0,\\
(x-6)(x-2)&=0,\\
x_{N1}=2,\ x_{N2}&=6.
\end{aligned}
$$



Slika 3.3: Skica premice $y = x$ in funkcije g z negibnima točkama in ničlama.

S skice 3.3 razberemo naslednje trditve, ki jih dokažemo:

(a) Za $x_0 < 3$ zaporedje divergira. Dokažimo, da je v tem primeru $x_{r+1} < x_r$ za vsak $r \in \mathbb{N}$:

$$g(x) - x = 8x - 12 - x^2 - x = -x^2 + 7x - 12 = -(x-3)(x-4),$$

torej je za $x < 3$ izraz $g(x) - x < 0$, zato zaporedje ne more biti konvergentno (če bi konvergiralo, bi konvergiralo k 3 ali 4).

(b) Za $x_0 > 5$ zaporedje divergira. Dokažimo, da velja $x_0 > 5 \Rightarrow x_1 < 3$. Potem po točki 12a zaporedje divergira.

$$
\begin{aligned}
3 - x_1 = 3 - g(x_0) &= 3 - 8x_0 + 12 + x_0^2\\
&= x_0^2 - 8x_0 + 15 = (x_0-3)(x_0-5) > 0,
\end{aligned}
$$

zato je $x_1 < 3$.

(c) Oglejmo si, kaj se zgodi, če je $x_0 = 3$,

$$g(3) = 8 \cdot 3 - 12 - 3^2 = 3,$$

torej je zaporedje konstantno in konvergira k 3.

(d) Če je $x_0 = 5$, je

$$g(5) = 8 \cdot 5 - 12 - 5^2 = 3$$

in po točki 12c zaporedje konvergira k 3.

(e) Ostane še primer, ko je $3 < x_0 < 5$. Trdimo, da v tem primeru zaporedje konvergira k 4. Izračunajmo

$$x_{r+1} - 4 = 8x_r - 12 - x_r^2 - 4 = -x_r^2 + 8x_r - 16 = -(x_r - 4)^2.$$

Oglejmo si napako na $r-$tem koraku iteracije $e_r = |x_r - 4|$. Iz zgornjega vemo, da je

$$e_{r+1} = e_r^2,$$

iz predpostavke $3 < x_0 < 5$ pa sledi

$$e_0 = |x_0 - 4| < 1.$$

Napaka na $r-$tem koraku je torej

$$\begin{aligned}
e_0 &= |x_0 - 4| < 1, \\
e_1 &= |x_1 - 4| = |x_0 - 4|^2 = e_0^2, \\
e_2 &= |x_2 - 4| = |x_1 - 4|^2 = e_0^4, \\
&\vdots \\
e_r &= e_0^{2^r} \longrightarrow 0, \text{ ko gre } r \to \infty,
\end{aligned}$$

in od tod sledi

$$|x_r - 4| \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies x_r \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Zanima nas tudi red konvergence. Izračunajmo odvode funkcije g v točki $x = 4$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 8 - 2x,\ g'(4) = 0, \\
g''(x) &= -2,\ g''(4) = -2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Po izreku sledi, da je konvergenca kvadratična (red je 2).

Zanima nas še, kje konvergenco zagotavlja konvergenčni izrek, tj. tam, kjer je

$$|g'(x)| = |8 - 2x| < 1.$$

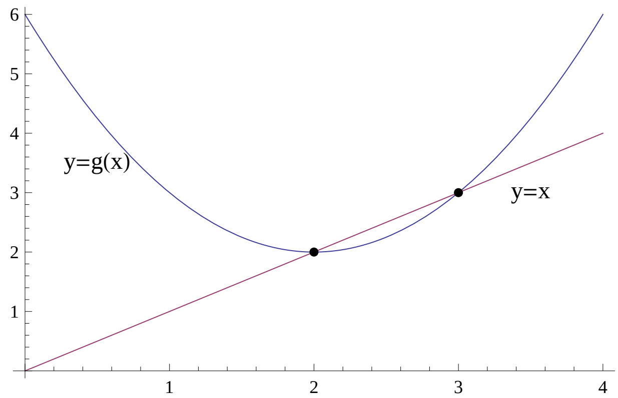
Za $x \leq 4$ dobimo $8-2x < 1$, torej $x > \frac{7}{2}$, za $x > 4$ pa $-8+2x < 1$, torej $x < \frac{9}{2}$. Izrek nam konvergenco zagotavlja na intervalu $(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$. Vidimo, da iteracija konvergira na večjem intervalu, kot ga zagotavlja konvergenčni izrek.

13. Za katere začetne približke je navadna iteracija za reševanje enačbe $x = g(x)$ konvergentna, če je $g(x) = x^2 - 4x + 6$? Kam konvergirajo ta zaporedja? Kolikšen je red konvergence? Za katere začetne približke zagotavlja konvergenco konvergenčni izrek?

Rešitev. Izračunajmo rešitve enačbe (tj. fiksne točke iteracijske funkcije g),

$$\begin{aligned} x &= g(x), \\ x &= x^2 - 4x + 6, \\ x^2 - 5x + 6 &= 0, \\ (x-3)(x-2) &= 0, \end{aligned}$$

torej sta fiksni točki $\alpha_1 = 2$ in $\alpha_2 = 3$. Skicirajmo funkcijo g in premico $y = x$ (slika 3.4). S skice dobimo naslednje predpostavke:



Slika 3.4: Skica premice $y = x$ in funkcije g z negibnima točkama.

(a) Za $x_0 > 3$ zaporedje divergira.

(b) Za $x_0 < 1$ zaporedje divergira.

(c) Za $x_0 = 3$ zaporedje konvergira k 3.

(d) Za $x_0 = 1$ zaporedje konvergira k 3.

(e) Za $x_0 \in (1, 3)$ zaporedje konvergira k 2.

Dokažimo predpostavke:

(a) Izračunajmo $g(x) - x$ za $x > 3$,

$$\begin{aligned} g(x) - x &= x^2 - 4x + 6 - x \\ &= x^2 - 5x + 6 \\ &= (x-3)(x-2) > 0 \text{ za } x > 3, \end{aligned}$$

torej po indukciji sledi, da je $x_{r+1} > x_r$, če je $x_0 > 3$, torej zaporedje ne more konvergirati k 2 ali k 3 in divergira.

(b) Dovolj je pokazati, da je $g(x_0) > 3$ za $x_0 < 1$, divergenca potem sledi iz točke 13a. Izračunajmo

$$\begin{aligned} g(x_0) - 3 &= x_0^2 - 4x_0 + 6 - 3 \\ &= x_0^2 - 4x_0 + 3 \\ &= (x_0 - 3)(x_0 - 1) > 0 \text{ za } x_0 < 1. \end{aligned}$$

(c) Za $x_0 = 3$ dobimo

$$g(x_0) = g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = 3,$$

torej je zaporedje konstantno in konvergira k 3.

(d) Za $x_0 = 1$ dobimo

$$g(x_0) = g(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 3,$$

od tu naprej pa je zaporedje po točki 13c konstantno, torej konvergira k 3.

(e) Naj bo $x_0 \in (1,3)$. Oglejmo si razliko $x_{r+1} - 2$,

$$x_{r+1} - 2 = x_r^2 - 4x_r + 6 - 2 = x_r^2 - 4x_r + 4 = (x_r - 2)^2.$$

Definirajmo napako na $r-$tem koraku iteracije z

$$e_r = |x_r - 2|.$$

Vemo, da velja $e_{r+1} = e_r^2$ in po predpostavki $e_0 = |x_0 - 2| < 1$, torej

$$\begin{aligned} e_0 &= |x_0 - 2| < 1, \\ e_1 &= |x_1 - 2| = |x_0 - 2|^2 = e_0^2, \\ e_2 &= |x_2 - 2| = |x_1 - 2|^2 = e_0^4, \\ &\vdots \\ e_r &= |x_r - 2| = |x_{r-1} - 2|^2 = e_0^{2^r} \to 0, \text{ ko gre } r \to \infty. \end{aligned}$$

Zato zaporedje $|x_r - 2| \to 0$, ko gre $r \to \infty$, in gre torej $x_r \to 2$. Zanima nas red konvergence. Izračunamo odvode:

$$g'(x) = 2x - 4,\ g'(2) = 0,$$
$$g''(x) = 2,\ g''(2) = 2 \neq 0.$$

Torej je konvergenca kvadratična (red je 2).
Konvergenčni izrek zagotavlja konvergenco, kjer je

$$|g'(x)| = |2x - 4| < 1.$$

Za $x \geq 2$ mora biti $2x - 4 < 1 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$, za $x < 2$ pa $-2x + 4 < 1 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$. Torej izrek zagotavlja konvergenco za vse $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.

14. Izpeljite tangentno metodo za rešitev enačbe in izračunajte naslednji približek z začetnim približkom x_0,

   (a) $x + \ln x = 0,\ x_0 = 1,$

   (b) $x = e^{-x},\ x_0 = 0,$

   (c) $\sin x = 10(1 - x),\ x_0 = 0.$

   Rešitev.

   (a) Tangentno metodo dobimo kot

   $$x_{r+1} = x_r - \frac{x_r + \ln x_r}{1 + \frac{1}{x_r}} = x_r - \frac{x_r(x_r + \ln x_r)}{1 + x_r}.$$

   Naslednji približek je

   $$x_1 = x_0 - \frac{x_0(x_0 + \ln x_0)}{1 + x_0} = 1 - \frac{1 \cdot (1 + 0)}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

   (b) Najprej preoblikujemo enačbo v obliko $f(x) = 0$,

   $$x - e^{-x} = 0,$$

   nato vstavimo v formulo za tangentno metodo,

   $$x_{r+1} = x_r - \frac{x_r - e^{-x_r}}{1 + e^{-x_r}}.$$

   Naslednji približek je

   $$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - e^{-x_0}}{1 + e^{-x_0}} = 0 - \frac{0 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Spet preoblikujemo enačbo v $\sin x - 10(1-x) = 0$ in vstavimo v formulo,

$$x_{r+1} = x_r - \frac{\sin x_r - 10(1-x_r)}{\cos x_r + 10}.$$

Naslednji približek je

$$x_1 = x_0 - \frac{\sin x_0 - 10(1-x_0)}{\cos x_0 + 10} = 0 - \frac{0 - 10(1-0)}{1+10} = \frac{10}{11}.$$

15. Določite vse polinome 4. stopnje z vodilnim koeficientom 1, pri katerih se tangentna metoda vede takole:

- v bližini ničle α ima linearno konvergenco,
- v bližini ničle $-\alpha$ ima kubično konvergenco.

Katere so preostale ničle in kakšen je red konvergence v njihovi bližini?

Rešitev. Ker je v okolici α konvergenca le linearna, mora biti α večkratna ničla. Kubična konvergenca v okolici $-\alpha$ pomeni, da je $p'(-\alpha) \neq 0$ in $p''(-\alpha) = 0$. Zapišimo polinom v obliki z ničlami (α ničla stopnje 2, $-\alpha$ enostavna ničla, neznana ničla (in edina neznanka!) naj bo β),

$$p(x) = (x-\alpha)^2(x+\alpha)(x-\beta).$$

Dvakrat odvajamo,

$$\begin{aligned}
p'(x) &= 2(x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2(x-\beta) + (x-\alpha)^2(x+\alpha) \\
p''(x) &= 2(x+\alpha)(x-\beta) + 2(x-\alpha)(x-\beta) + 2(x-\alpha)(x+\alpha) + \\
&\quad + 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 + \\
&\quad + 2(x-\alpha)(x+\alpha) + (x-\alpha)^2 \\
&= 2(x+\alpha)(x-\beta) + 4(x-\alpha)(x-\beta) + \\
&\quad + 4(x-\alpha)(x+\alpha) + 2(x-\alpha)^2,
\end{aligned}$$

in vstavimo $-\alpha$,

$$\begin{aligned}
p''(-\alpha) &= 4(-2\alpha)(-\alpha-\beta) + 2(-2\alpha)^2 \\
&= 8\alpha(\alpha+\beta) + 8\alpha^2 \\
&= 8\alpha(2\alpha+\beta) = 0.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je

$$\beta = -2\alpha.$$

Preverimo še ostale pogoje,

$$p'(-\alpha) = (-2\alpha)^2(-\alpha - \beta) = 4\alpha^3 \neq 0,$$

ker bi v primeru $\alpha = 0$ dobili v okolici α linearno in kubično konvergenco, kar pa ni mogoče.

Zanima nas še red konvergence. Ker je $\beta \neq \pm\alpha$, torej je enostavna ničla, mora biti v okolici β metoda vsaj reda 2. Izračunajmo

$$p''(\beta) = p''(-2\alpha) = 4(-3\alpha)(-\alpha) + 2(-3\alpha)^2 = 30\alpha^2 \neq 0,$$

torej je metoda v okolici β reda 2 (kvadratična konvergenca).

16. Izpeljite Laguerrovo metodo za

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

in naredite en korak z začetnim približkom $x_0 = 0$.

Rešitev. Najprej izračunamo s_1 in s_2,

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{3x^2 - 12x + 11}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}, \\ s_2(x) &= -s_1'(x) \\ &= \frac{(3x^2 - 12x + 11)^2 - (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)(6x - 12)}{(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)^2}, \end{aligned}$$

torej

$$s_1(x_0) = s_1(0) = -\frac{11}{6},\ s_2(x_0) = s_2(0) = \frac{121 - 6 \cdot 12}{36} = \frac{49}{36}$$

ki ju potem uporabimo v enačbi (3.1) za nov približek. Nov približek je v tem primeru enak

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{n}{s_1(x_0) \pm \sqrt{(n-1)(ns_2(x_0) - s_1^2(x_0))}} \\ &= 0 - \frac{3}{-\frac{11}{6} \pm \sqrt{2(3 \cdot \frac{49}{36} - \frac{121}{36})}} \\ &= -\frac{3}{-\frac{11}{6} - \sqrt{2 \cdot \frac{26}{36}}} \\ &= \frac{18}{11 + 2\sqrt{13}} \doteq 0.9884, \end{aligned}$$

kar je že zelo blizu 1, ki je ničla polinoma. V imenovalcu smo izbrali predznak -, ker je $-\frac{11}{6} < 0$ in bo tako imenovalec večji po absolutni vrednosti.

Poglavje 4

Reševanje sistemov nelinearnih enačb

4.1 Sistemi nelinearnih enačb

Rešujemo sistem n enačb z n neznankami

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,
\end{aligned}
$$

ki ga zapišemo v obliki

$$F(x) = 0,$$

kjer je

$$F = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T\ ,\ x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T\ ,\ F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

4.2 Navadna iteracija

Poiščemo funkcijo $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, za katero velja

$$G(\alpha) = \alpha \ \Leftrightarrow\ F(\alpha) = 0.$$

Algoritem:

```
Izberemo začetni približek x^(0) ∈ C^n
r = 0, 1, ...
    x^(r+1) = G(x^(r))
```

4.3 Newtonova metoda

Newtonova metoda je posplošitev tangentne metode, kjer namesto odvoda nastopa Jacobijeva matrika,

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} - JF^{-1}(x^{(r)})F(x^{(r)}).$$

Inverza matrike ne računamo, zato sistem prevedemo na reševanje sistema linearnih enačb,

$$JF(x^{(r)})(x^{(r+1)} - x^{(r)}) = -F(x^{(r)}).$$

Označimo razliko $x^{(r+1)} - x^{(r)} = \Delta x^{(r)}$ in dobimo

$$JF(x^{(r)})\Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)}).$$

Algoritem:

Izberemo začetni približek $x^{(0)}$
$r = 0, 1, \ldots$
  rešimo sistem $JF(x^{(r)})\Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$
  $x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(r)}$

V okolici enostavne ničle imamo kvadratično konvergenco ($JF(\alpha)$ je nesingularna). Slabost je, da težko izberemo dober začetni približek. Na vsakem koraku moramo izračunati novo Jacobijevo matriko, zato je metoda precej zahtevna.

4.3.1 Zgled

Z uporabo Octavea rešujemo sistem nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + y &= 1, \\ x^2 - y^2 - x + 10y &= 25. \end{aligned}$$

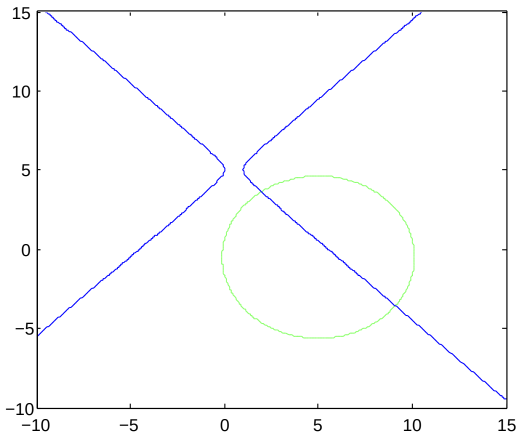
Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$F = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 10x + y - 1 \\ x^2 - y^2 - x + 10y - 25 \end{bmatrix},$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko,

$$JF = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y + 1 \\ 2x - 1 & -2y + 10 \end{bmatrix}.$$

Pomagamo si s programom `newton` ([1]). Ukazi, ki jih uporabimo, so zapisani v skripti `testnewton1` ([1]). Začetni približek in število rešitev določimo s



Slika 4.1: Slika krivulj $x^2 + y^2 - 10x + y = 1$ in $x^2 - y^2 - x + 10y = 25$.

slike 4.1. Na sliki vidimo, da se krivulji sekata v okolici točk $(2, 4)$ in $(9, -3)$, zato ti točki uporabimo za začetna približka v Newtonovi metodi.
Če uporabimo začetni približek $(2, 4)$ nam Newtonova metoda vrne rezultat $(1.9623, 3.6258)$, za začetni približek $(9, -3)$ pa $(9.0944, -3.5799)$. Dobili smo dve različni rešitvi sistema enačb, s slike 4.1 pa vidimo, da sta to edini rešitvi. Torej smo poiskali vse rešitve sistema.

4.4 Naloge

1. Za dane sisteme enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $[1, 1]^T$,

   (a) $$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 2, \\ x^2 - xy + y &= 0, \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2, \\ x^2 - 2xy + y &= 2, \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 10x + y = 1, \\ &x^2 - y^2 - x + 10y = 25. \end{aligned}$$

   Rešitev.

(a) Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + 2y^2 - 2 \\ x^2 - xy + y \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 4y \\ 2x - y & -x + 1 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$JF(x_0, y_0) \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -F(x_0, y_0),$$

torej

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} 2\, \Delta x_0 + 4\, \Delta y_0 &= -1, \\ \Delta x_0 &= -1, \end{aligned}$$

od koder dobimo še $\Delta y_0 = \frac{1}{4}$. Nov približek je torej enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

(b) Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x^2 - 2xy + y - 2 \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x - 2y & -2x + 1 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} 2\,\Delta x_0 + 2\,\Delta y_0 &= 0, \\ -\Delta y_0 &= 2, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta y_0 = -2$ in $\Delta x_0 = 2$. Nov približek je torej enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 10x + y - 1 \\ x^2 - y^2 - x + 10y - 25 \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y + 1 \\ 2x - 1 & -2y + 10 \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$JF(x_0, y_0) \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -F(x_0, y_0),$$

torej

$$\begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} -8\,\Delta x_0 + 3\,\Delta y_0 &= 8, \\ \Delta x_0 + 8\,\Delta y_0 &= 16, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta x_0 = -\frac{16}{67}$ in $\Delta y_0 = \frac{136}{67}$. Nov približek je torej enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{16}{67} \\ \frac{136}{67} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{51}{67} \\ \frac{203}{67} \end{bmatrix}.$$

2. Za dani sistem enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $[\frac{1}{4}, \frac{15}{16}]^T$,

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + y) &= 1 - y, \\ \sqrt{x} + xy &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \ln(x^2+y) - 1 + y \\ \sqrt{x} + xy \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x & \frac{1}{x^2+y} + 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} + y & x \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$JF(x_0,y_0) \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = -F(x_0,y_0),$$

torej

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{31}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{47}{64} \end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\Delta x_0 + 2\,\Delta y_0 &= \frac{1}{16}, \\ \frac{31}{16}\,\Delta x_0 + \frac{1}{4}\,\Delta y_0 &= -\frac{47}{64}, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta x_0 = -\frac{19}{48}$ in $\Delta y_0 = \frac{25}{192}$, torej je nov približek enak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{15}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{19}{48} \\ \frac{25}{192} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{48} \\ \frac{205}{192} \end{bmatrix}.$$

3. Zapišite Newtonovo metodo za reševanje sistema enačb

$$\begin{aligned} x^3 - 3xy^2 &= -1, \\ 3x^2y - y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo problem v obliki $F(x) = 0$,

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^3 - 3xy^2 + 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{bmatrix} = 0,$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko,

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -3x \cdot 2y \\ 3y \cdot 2x & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix}.$$

V prvem koraku metode izberemo začetni približek $[x_0, y_0]^T$ in rešujemo sistem

$$\begin{bmatrix} 3x_0^2 - 3y_0^2 & -6x_0y_0 \\ 6x_0y_0 & 3x_0^2 - 3y_0^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_0^3 - 3x_0y_0^2 + 1 \\ 3x_0^2y_0 - y_0^3 \end{bmatrix}.$$

4. Za dani sistem enačb naredite korak Newtonove metode z začetnim približkom $[1,1,1]^T$,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=1,\\ 2x^2+y^2-4z&=0,\\ 3x^2-4y+z^2&=0. \end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo v vektorski obliki

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1\\ 2x^2+y^2-4z\\ 3x^2-4y+z^2 \end{bmatrix}$$

in izračunajmo Jacobijevo matriko

$$JF(x,y)=\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z\\ 4x & 2y & -4\\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}.$$

Rešiti moramo sistem

$$JF(x_0,y_0,z_0)\begin{bmatrix}\Delta x_0\\ \Delta y_0\\ \Delta z_0\end{bmatrix}=-F(x_0,y_0,z_0),$$

torej

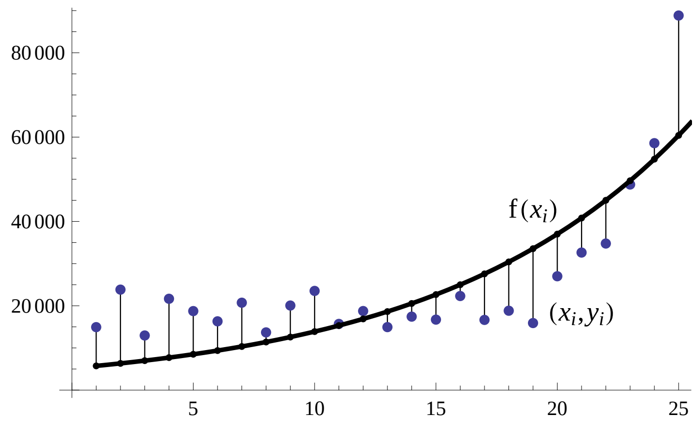
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2\\ 4 & 2 & -4\\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_0\\ \Delta y_0\\ \Delta z_0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Zapišimo sistem v običajni obliki,

$$\begin{aligned} 2\,\Delta x_0+2\,\Delta y_0+2\,\Delta z_0&=-2,\\ 4\,\Delta x_0+2\,\Delta y_0-4\,\Delta z_0&=1,\\ 6\,\Delta x_0-4\,\Delta y_0+2\,\Delta z_0&=0, \end{aligned}$$

od koder dobimo $\Delta x_0=-\frac{1}{12},\Delta y_0=-\frac{7}{18}$ in $\Delta z_0=-\frac{19}{36}$, torej je nov približek enak

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{12}\\ -\frac{7}{18}\\ -\frac{19}{36}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{12}\\ \frac{11}{18}\\ \frac{17}{36}\end{bmatrix}.$$



Slika 4.2: Iskanje funkcije, ki se najbolje prilega podatkom.

5. Dani so podatki (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. Poiščite funkcijo oblike $y = f(x) = a\ e^{bx}$, ki se najbolje prilega podatkom.

   Rešitev.

   Oglejmo si skico na sliki 4.2. Razdalja med točko (x_i, y_i), ki jo določajo podatki, in točko $(x_i, f(x_i))$, ki leži na grafu iskane funkcije, je enaka $|y_i - f(x_i)|$. Želimo čim manjše odstopanje podatkov od funkcije, zato seštejemo razdalje pri vseh točkah,

   $$\sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|.$$

   Želimo se izogniti absolutni vrednosti, zato razdaljo kvadriramo in dobimo funkcijo

   $$\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\ e^{bx_i})^2,$$

   ki je odvisna od parametrov a in b. Iščemo minimum te funkcije, zato jo (parcialno) odvajamo. Tako dobimo nelinearen sistem

   $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}: &\quad \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a\ e^{bx_i}) \cdot (-e^{bx_i}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial b}: &\quad \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a\ e^{bx_i}) \cdot (-ax_i\ e^{bx_i}) = 0. \end{aligned}$$

   Rešujemo torej enačbo $F(a, b) = 0$ s funkcijo

   $$F(a, b) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} (y_i\ e^{bx_i} - a\ e^{2bx_i}) \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i\ e^{bx_i} - ax_i\ e^{2bx_i}) \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo Jacobijevo matriko,

$$JF(a,b) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n e^{2bx_i} & \sum_{i=1}^n (x_i y_i\, e^{bx_i} - 2ax_i\, e^{2bx_i}) \\ -\sum_{i=1}^n x_i\, e^{2bx_i} & \sum_{i=1}^n (x_i^2 y_i\, e^{bx_i} - 2ax_i^2\, e^{2bx_i}) \end{bmatrix},$$

zdaj pa rešimo sistem

$$JF(a_r, b_r) \begin{bmatrix} \Delta a_r \\ \Delta b_r \end{bmatrix} = -F(a_r, b_r),$$
$$[a_{r+1}, b_{r+1}]^T = [a_r, b_r]^T + [\Delta a_r, \Delta b_r]^T.$$

Težave imamo še z izbiro začetnega približka, vendar se v to ne bomo spuščali.

Motivacija za to nalogo je npr. rast populacije zajcev na nekem območju ali razpad radioaktivnega elementa, kjer želimo iz danih podatkov določiti, kako se bo rast nadaljevala.

Poglavje 5

Vektorske in matrične norme

5.1 Osnove linearne algebre

Ponovimo množenje matrik. Pri tem bomo spoznali tudi nekaj posebnih matrik in njihove lastnosti.
Za začetek zmnožimo matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}.$$

Matrike množimo tako, da skalarno množimo vrstico prve matrike s stolpcem druge matrike. Rezultat zapišemo na ustrezno mesto v rezultatu. Torej:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c & 1 \cdot d + 2 \cdot e + 3 \cdot f \\ 4 \cdot a + 5 \cdot b + 6 \cdot c & 4 \cdot d + 5 \cdot e + 6 \cdot f \\ 7 \cdot a + 8 \cdot b + 9 \cdot c & 7 \cdot d + 8 \cdot e + 9 \cdot f \end{bmatrix}.$$

Produkta $B \cdot A$ ne moremo izračunati, saj se dimenziji ne ujemata (vrstica matrike B je dolga 2, stolpec matrike A pa 3). Že pri tem primeru je očitno, da množenje matrik ni komutativno ($A \cdot B \neq B \cdot A$).
Zmnožimo matriki A in

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

najprej množimo A z leve:

$$P \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

zdaj pa še z desne:

$$A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Spet vidimo, da je množenje nekomutativno, opazimo pa tudi, da je množenje z matriko P le premešalo vrstice/stolpce matrike A, odvisno od tega, ali smo A množili z desne ali z leve strani. Matrikam take oblike zato pravimo tudi *permutacijske matrike*. Te matrike imajo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko eno enico, ostali elementi pa so enaki 0. Poseben primer je *identiteta*, ki ima enice na diagonali in ohrani vse vrednosti v matriki A.
Še ena posebnost pri množenju matrik so *delitelji niča*, saj lahko velja $A \cdot B = 0$, tudi kadar nobena od matrik A in B ni enaka 0, npr.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrike velikokrat uporabljamo kot krajši zapis linearnega sistema. Naslednje (matrične) sisteme preoblikujmo v sisteme, kakršnih smo vajeni iz srednje šole, in jih rešimo:
Primer 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

od tod

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 5, \\ x - y + 2z &= 6, \\ 3x - 5y - z &= 0, \end{aligned}$$

in z nekaj računanja dobimo rezultat $x = -\frac{47}{35}, y = -\frac{7}{5}, z = \frac{104}{35}$.
Primer 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ -3y + z &= 4, \\ -5z &= 10, \end{aligned}$$

in rešitev je $x = 4, y = -2, z = -2$.
Primer 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

od koder dobimo sistem

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ 2x + y &= 7, \\ -x + z &= 0, \\ -4x + 3y - 5z + w &= 3 \end{aligned}$$

in rešitev $x = 1, y = 5, z = 1, w = -3$.
Opazimo, da smo imeli v drugem in tretjem primeru precej manj dela kot v prvem. Če podrobneje pogledamo, vidimo, da sta imeli matriki v teh dveh primerih posebno strukturo. Pravimo, da sta *trikotne* oblike. Matrika v drugem primeru je *zgornje trikotna*, saj ima vse elemente pod diagonalo enake 0. Podobno rečemo, da je matrika iz tretjega primera *spodnje trikotna*, ker ima vse elemente nad diagonalo enake 0. Iz danih primerov vidimo, da je reševanje trikotnih sistemov lažje od reševanja polnih sistemov. To dejstvo bomo veliko uporabljali v naslednjem poglavju.

5.2 Vektorske norme

Dan je vektor $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Funkcija

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

je *vektorska norma,* če za vse $x, y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$, velja

1. $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Lastnosti 3 pravimo *trikotniška neenakost.*
Primeri norm so:

1. prva norma, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$,
2. druga norma, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$,
3. neskončna norma, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

5.3 Matrične norme

Matrična norma je preslikava $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, za katero velja

1. $\|A\| \geq 0,\ \|A\| = 0 \ \Leftrightarrow \ A = 0$,
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

za vse matrike $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in vse skalarje $\alpha \in \mathbb{R}$. Točki 3 rečemo *trikotniška neenakost*, točki 4 pa *submultiplikativnost.*
Primeri norm so:

1. Prva norma
$$\|A\|_1 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1,$$
za katero velja
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right),$$
torej je enaka maksimumu vsot absolutnih vrednosti elementov matrike po stolpcih.

2. Druga norma
$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2,$$
za katero velja
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}.$$

3. Neskončna norma
$$\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty,$$
za katero velja
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right),$$
torej je enaka maksimumu vsot absolutnih vrednosti elementov matrike po vrsticah.

5.4 Naloge

1. Izračunajte prvo, drugo in neskončno normo danih vektorjev,

   (a) $x = [1, 1, -2]^T$,

   (b) $x = [1, -2, -2]^T$.

   Rešitev.

   (a) Izračunamo po definiciji:

   $$\begin{aligned} \|x\|_1 &= 1 + 1 + 2 = 4, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}, \\ \|x\|_\infty &= \max\{1, 1, 2\} = 2. \end{aligned}$$

   (b) Izračunamo po definiciji:

   $$\begin{aligned} \|x\|_1 &= 1 + 2 + 2 = 5, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \\ \|x\|_\infty &= \max\{1, 2, 2\} = 2. \end{aligned}$$

2. Pokažite, da sta prva in neskončna norma res vektorski normi.

   Rešitev. Najprej pokažimo, da je prva norma vektorska norma.

   (a) Nenegativnost $\|x\|_1 \geq 0$ je očitna, saj seštevamo nenegativna števila. Enakost dobimo natanko takrat, ko so vse komponente vektorja enake nič, to pa je natanko takrat, ko je $x = 0$.

   (b) Preverimo drugo točko,

   $$\begin{aligned} \|\alpha x\|_1 &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \cdots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha| \left(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\right) = |\alpha| \cdot \|x\|_1. \end{aligned}$$

   (c) Preverimo še trikotniško neenakost,

   $$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1, \end{aligned}$$

   kjer smo uporabili trikotniško neenakost, ki velja za absolutno vrednost.

Pokažimo še, da je neskončna norma vektorska norma.

(a) Nenegativnost je spet očitna, saj računamo maksimum nenegativnih števil. Maksimum nenegativnih števil je enak 0 natanko takrat, ko so vsa števila enaka 0, torej natanko takrat, ko je $x = 0$.

(b) Preverimo drugo točko,

$$\|\alpha x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |\alpha\, x_i| = |\alpha| \max_{1 \le i \le n} |x_i| = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty.$$

(c) Ostane še trikotniška neenakost,

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i + y_i| \le \max_{1 \le i \le n} |x_i| + \max_{1 \le i \le n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

kjer smo uporabili, da je maksimum vsote manjši ali enak vsoti maksimumov.

3. Pokažite, da veljajo neenakosti

(a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\, \|x\|_\infty$,

(b) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$,

(c) $\|x\|_2 \le \|x\|_1$.

Rešitev.

(a) Preverimo po definicijah norm,

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1,$$

saj je maksimum le eno od števil na desni, na desni pa temu številu prištejemo še nekaj nenegativnega.

Za desno neenakost uporabimo oceno $|x_j| \le \max_{1 \le i \le n} |x_i| = \|x\|_\infty$ za vsak $j = 1, 2, \ldots, n$ (torej vsaka komponenta je manjša ali enaka največji),

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ &\le \underbrace{\|x\|_\infty + \|x\|_\infty + \cdots + \|x\|_\infty}_{n} = n\, \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

(b) Označimo z ℓ indeks, pri katerem dosežemo maksimum, torej $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| = |x_\ell|$. Potem velja

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \ge \sqrt{x_\ell^2} = |x_\ell| = \|x\|_\infty,$$

saj smo v vsoti izpustili nenegativne člene.

Za desno neenakost uporabimo enako oceno kot v točki 3a, torej $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ za vse j,

$$\begin{aligned}\|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq \sqrt{\underbrace{\|x\|_\infty^2 + \|x\|_\infty^2 + \cdots + \|x\|_\infty^2}_{n}} \\ &= \sqrt{n\,\|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

(c) Dokazati želimo

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Če neenačbo kvadriramo, dobimo

$$\begin{aligned}&x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2 \\ &\quad = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2 \cdot (\text{mešani členi, ki so vsi nenegativni}),\end{aligned}$$

torej neenakost velja.

4. Izračunajte prvo in neskončno normo danih matrik,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo normi matrike A. Vsoti absolutnih vrednosti po stolpcih sta 9 in 12, torej je $\|A\|_1 = \max\{9, 12\} = 12$. Vsote po vrsticah so 3,7,11, torej je $\|A\|_\infty = \max\{3, 7, 11\} = 11$. Normi matrike B sta

$$\begin{aligned}\|B\|_1 &= \max\{5, 13, 19\} = 19, \\ \|B\|_\infty &= \max\{15, 12, 10\} = 15.\end{aligned}$$

5. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & n-1 & & & & \\ n-1 & -4 & n-2 & & & \\ & n-2 & -6 & n-3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -2(n-1) & 1 \\ & & & & 1 & -2n \end{bmatrix}.$$

Izračunajte prvo in neskončno normo.

Rešitev. Izračunajmo vsote absolutnih vrednosti stolpcev,

$$\begin{aligned}
1.\ \text{stolpec:}\ & n+1,\\
2.\ \text{stolpec:}\ & 2n+1,\\
3.\ \text{stolpec:}\ & 2n+1,\\
& \vdots\\
j\text{−ti stolpec:}\ & (n-j)+2j+(n-(j-1)) = 2n+1,\\
& \vdots\\
\text{zadnji stolpec:}\ & 2n+1,
\end{aligned}$$

torej je

$$\|A\|_1 = \max\{n+1, 2n+1\} = 2n+1.$$

Ker je matrika simetrična, so vsote absolutnih vrednosti vrstic enake vsotam absolutnih vrednosti stolpcev, zato je

$$\|A\|_\infty = \|A\|_1 = 2n+1.$$

6. Naj bo

$$N_\infty(A) = \max_{1\le i,k\le n} |a_{i,k}|,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dokažite, da je $nN_\infty(A)$ matrična norma. Dokažite, da $N_\infty(A)$ ni matrična norma.

Rešitev. Preverimo po točkah.

(a) Nenegativnost je očitna, saj računamo maksimum nenegativnih števil, torej $nN_\infty(A) \ge 0$. Enakost dobimo natanko takrat, kadar so vsa števila enaka 0, torej natanko takrat, ko je $A = 0$.

(b) Preverimo po definiciji

$$nN_\infty(\alpha A) = n \max_{1\le i,k\le n} |\alpha a_{i,k}| = n\,|\alpha| \max_{1\le i,k\le n} |a_{i,k}| = |\alpha|\, nN_\infty(A),$$

torej tudi druga točka velja.

(c) Preverimo trikotniško neenakost,

$$\begin{aligned}
nN_\infty(A+B) &= n \max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}+b_{i,j}|\\
&\le n \max_{1\le i,j\le n} (|a_{i,j}|+|b_{i,j}|)\\
&\le n\,(\max_{1\le i,j\le n} |a_{i,j}| + \max_{1\le i,j\le n} |b_{i,j}|)\\
&= nN_\infty(A) + nN_\infty(B).
\end{aligned}$$

(d) Ostane še submultiplikativnost,

$$
\begin{aligned}
nN_\infty(A\cdot B) &= n \max_{1\le i,k\le n}\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}\right| \\
&\le n \max_{1\le i,k\le n}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}b_{j,k}| \\
&\le n \max_{1\le i,k\le n}\sum_{j=1}^n \left(\underbrace{\max_{1\le \ell,m\le n}|a_{\ell,m}|}_{N_\infty(A)}\cdot\underbrace{\max_{1\le \ell,m\le n}|b_{\ell,m}|}_{N_\infty(B)}\right) \\
&= nN_\infty(A)\cdot nN_\infty(B)
\end{aligned}
$$

Veljajo vse točke, torej je $nN_\infty(A)$ matrična norma.

Pokažimo še, da $N_\infty(A)$ ni matrična norma. Definirajmo matriki

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Njun produkt je enak

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo $N_\infty(A),\ N_\infty(B)$ in $N_\infty(A\cdot B)$,

$$
\begin{aligned}
N_\infty(A) &= 1, \\
N_\infty(B) &= 1, \\
N_\infty(A\cdot B) &= 2.
\end{aligned}
$$

Torej v tem primeru ne velja submultiplikativnost

$$N_\infty(A\cdot B)\le N_\infty(A)\cdot N_\infty(B)$$

in $N_\infty(A)$ ni matrična norma.

Poglavje 6

Reševanje sistemov linearnih enačb

6.1 Štetje operacij

Za izračun skalarnega produkta vektorjev $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$y^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

potrebujemo $2n-1$ osnovnih operacij (n množenj in $n-1$ seštevanj $\Rightarrow 2n-1$ operacij).
Produkt $y = A \cdot x,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, lahko izračunamo kot

$$y_i = \alpha_i^T \cdot x,$$

kjer je α_i^T $i-$ta vrstica matrike A. Za izračun potrebujemo $2n^2 - n$ osnovnih operacij (n skalarnih produktov po $2n-1$ operacij $\Rightarrow 2n^2 - n$ operacij).
Produkt dveh matrik $C = A \cdot B,\ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, izračunamo po stolpcih kot

$$c_i = A \cdot b_i$$

in za izračun potrebujemo $2n^3 - n^2$ operacij ($n(2n^2 - n) = 2n^3 - n^2$).

6.2 LU razcep brez pivotiranja

Dano matriko A zapišemo kot produkt

$$A = L \cdot U,$$

kjer je L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.

Elemente, s katerimi v algoritmu delimo, imenujemo *pivotni elementi (pivoti).* Postopek deluje le, če so vsi pivoti neničelni, nestabilen pa je tudi, če so pivoti blizu 0. Rešitev obeh problemov je pivotiranje (delno ali kompletno).

Algoritem za LU razcep brez pivotiranja:

```
j = 1, 2, ..., n − 1
    i = j + 1, j + 2, ..., n
        ℓ_ij = a_ij / a_jj
        k = j + 1, j + 2, ..., n
            a_ik = a_ik − ℓ_ij a_jk
```

Število operacij, ki jih potrebujemo za izračun LU razcepa, je

$$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa, to naredimo v treh korakih:

1. izračunamo LU razcep matrike $A : A = LU$,
2. prema substitucija: $Ly = b$,
3. obratna substitucija: $Ux = y$.

Za rešitev sistema potrebujemo

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{n^2 - n}_{\text{prema subst.}} + \underbrace{n^2}_{\text{obratna subst.}} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

operacij.

Algoritem za premo substitucijo $Ly = b$:

```
y_1 = b_1
k = 2, 3, ..., n
    y_k = b_k − Σ_{j=1}^{k−1} ℓ_kj y_j
```

Algoritem za obratno substitucijo $Ux = y$:

```
k = n, n − 1, ..., 1
    x_k = (1/u_kk) (y_k − Σ_{j=k+1}^{n} u_kj x_j)
```

6.2.1 Zgled

Izračunajmo LU razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

V vsakem koraku popravimo matriko A in dopolnimo matriko L. Zadnja prirejenka je matrika U.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriko A priredimo tako, da prepišemo prvo vrstico, prvi stolpec dopolnimo z ničlami in izpolnimo ostala mesta,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 5 - 2 \cdot 2 & 6 - 2 \cdot 3 \\ 0 & 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 & 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{\frac{5}{2}} \end{bmatrix},$$

hkrati zgradimo še prvi stolpec matrike L in na diagonali zapišemo enice,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{4}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Isti postopek ponovimo na manjšem delu matrike (zapisan odebeljeno) in dobimo

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} - 1 \cdot 0 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat je

$$A = L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

6.3 LU razcep z delnim pivotiranjem

Pri delnem pivotiranju dopuščamo zamenjavo vrstic. To pomeni, da, ko pridemo do $j-$tega stolpca, poiščemo med $a_{jj}, a_{j+1,j}, \ldots, a_{nj}$ po absolutni vrednosti največji element in zamenjamo $j-$to vrstico in vrstico s po absolutni vrednosti maksimalnim elementom.

Rezultat je
$$PA = LU,$$
kjer je P permutacijska matrika, ki opisuje preureditev vrstic, L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.

Algoritem za LU razcep z delnim pivotiranjem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
 poišči indeks m, tako da je $|a_{mj}| \geq |a_{ij}|$ za $i = j, j+1, \ldots, n$
 zamenjaj $m-$to in $j-$to vrstico
 $i = j+1, j+2, \ldots, n$
  $\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
  $k = j+1, j+2, \ldots, n$
   $a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Velja $|\ell_{ij}| \leq 1$.

Število operacij, ki jih potrebujemo, je $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ in še $\mathcal{O}(n^2)$ primerjanj za iskanje pivotov.

Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem, to storimo v treh korakih:

1. poiščemo LU razcep z delnim pivotiranjem: $PA = LU$,
2. prema substitucija: $Ly = Pb$,
3. obratna substitucija: $Ux = y$.

6.3.1 Zgled

Izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem matrike
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Začetna permutacijska matrika P je kar identiteta, v matriki A je odebeljeno označen pivot,
$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjamo 1. in 2. vrstico,
$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj naredimo korak kot v LU razcepu brez pivotiranja,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{-2} & -2 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjamo 2. in 3. vrstico,

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}, A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat lahko preverimo z Octaveom, vpišemo `[L,U,P] = lu(A)`.

6.4 LU razcep s kompletnim pivotiranjem

Pri kompletnem pivotiranju dopuščamo zamenjavo vrstic in stolpcev. To pomeni, da, ko pridemo do $j-$tega stolpca, poiščemo po absolutni vrednosti največji element v podmatriki in zamenjamo ustrezni vrstici in stolpca. Rezultat je

$$PAQ = LU,$$

kjer je P permutacijska matrika, ki opisuje preureditev vrstic, Q permutacijska matrika za preureditev stolpcev, L spodnje trikotna matrika z enicami na diagonali in U zgornje trikotna matrika.

Algoritem za LU razcep s kompletnim pivotiranjem:

$j = 1, 2, \ldots, n-1$
  poišči a_{mr} - po abs. vrednosti maksimalen element v $A(j:n, j:n)$
  zamenjaj $r-$ti in $j-$ti stolpec
  zamenjaj $m-$to in $j-$to vrstico
  $i = j+1, j+2, \ldots, n$
    $\ell_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$
    $k = j+1, j+2, \ldots, n$
      $a_{ik} = a_{ik} - \ell_{ij} a_{jk}$

Velja $|\ell_{ij}| \leq 1$.
Število operacij, ki jih potrebujemo, je $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ in še $\mathcal{O}(n^3)$ primerjanj za iskanje pivotov. Dodatna cena, ki jo plačamo za iskanje pivotov je običajno prevelika, da bi odtehtala večjo stabilnost.

Če rešujemo sistem $Ax = b$ s pomočjo LU razcepa s kompletnim pivotiranjem, to storimo v štirih korakih:

1. poiščemo LU razcep s kompletnim pivotiranjem: $PAQ = LU$,
2. prema substitucija: $Ly = Pb$,
3. obratna substitucija: $U\tilde{x} = y$,
4. menjava komponent vektorja: $x = Q\tilde{x}$.

6.5 Razcep Choleskega

Pravimo, da je matrika A *simetrična pozitivno definitna* natanko tedaj, ko velja

$$A = A^T \text{ in } x^T Ax > 0 \text{ za vsak } x \neq 0.$$

V tem primeru se razcep Choleskega izvede. Ta razcep je najhitrejši način za ugotavljanje pozitivne definitnosti. Če matrika A ni pozitivno definitna, v algoritmu pod kvadratnim korenom dobimo negativne vrednosti. Simetričnost preverimo neposredno.
Matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zapišemo v obliki $A = V \cdot V^T$, kjer je V spodnje trikotna matrika, ki ima pozitivne diagonalne elemente ($v_{ii} > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$).
Algoritem za razcep Choleskega:

$k = 1, 2, \ldots, n$
  $v_{kk} = (a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2)^{\frac{1}{2}}$
  $j = k + 1, k + 2, \ldots, n$
    $v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}}(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji}v_{ki})$

Število operacij, ki jih potrebujemo za izračun razcepa Choleskega, je

$$\sum_{k=1}^{n}(2k + \sum_{j=k+1}^{n} 2k) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2n}{3} = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

Če rešujemo sistem $Ax = b$, kjer je A simetrična pozitivno definitna matrika, to naredimo v treh korakih:

1. razcep Choleskega: $A = V \cdot V^T$,
2. prema substitucija: $Vy = b$,
3. obratna substitucija: $V^T x = y$.

Število operacij, ki jih potrebujemo za rešitev sistema, je $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

6.5.1 Zgled

Izračunajmo razcep Choleskega matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 & -5 & -5 \\ 4 & 1 & 9 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 & 22 & 7 \\ 4 & -5 & 1 & 7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Elemente matrike V izračunamo kot piše v algoritmu, torej diagonalni element matrike V dobimo tako, da diagonalnemu elementu matrike A odštejemo vsoto kvadratov elementov matrike V levo od iskanega diagonalca in rezultat korenimo,

$$v_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Za $j > k$ računamo

$$v_{jk} = \frac{1}{v_{kk}} \left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ji} v_{ki} \right),$$

v vsoti so produkti istoležnih členov v $j-$ti in $k-$ti vrstici. Če torej iščemo element v 4. vrstici in 2. stolpcu, bomo množili elemente 2. in 4. vrstice (ne vseh), produkte sešteli in vsoto odšteli elementu matrike A. Rezultat delimo z diagonalnim elementom matrike V, ki leži nad iskanim elementom.

1. izračunamo prvi diagonalni element, $v_{11} = \sqrt{4} = 2$,
2. izračunamo prvi stolpec,

$$\begin{aligned} v_{21} &= \frac{1}{2}(-2) = -1, \\ v_{31} &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2, \\ v_{41} &= \frac{1}{2}(-2) = -1, \\ v_{51} &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2. \end{aligned}$$

   Do sem smo sestavili prvi stolpec

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & & & & \\ 2 & & & & \\ -1 & & & & \\ 2 & & & & \end{bmatrix}.$$

3. prestavimo se v drugi stolpec, izračunamo diagonalni element $v_{22} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3$,

4. izračunamo drugi stolpec,

$$\begin{aligned} v_{32} &= \frac{1}{3}(1 - 2 \cdot (-1)) = 1, \\ v_{42} &= \frac{1}{3}(-5 - (-1) \cdot (-1)) = -2, \\ v_{52} &= \frac{1}{3}(-5 - 2 \cdot (-1)) = -1, \end{aligned}$$

sestavili smo matriko

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & & & \\ -1 & -2 & & & \\ 2 & -1 & & & \end{bmatrix}.$$

5. v tretjem stolpcu spet najprej izračunamo diagonalni element $v_{33} = \sqrt{9 - \mathbf{2}^2 - \mathbf{1}^2} = 2$,

6. in izračunamo ostanek tretjega stolpca,

$$\begin{aligned} v_{43} &= \frac{1}{2}(-2 - (-1) \cdot 2 - (-2) \cdot 1) = 1, \\ v_{53} &= \frac{1}{2}(1 - 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = -1, \end{aligned}$$

dobimo matriko

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & & \\ 2 & -1 & -1 & & \end{bmatrix}.$$

7. izračunamo še ostale elemente matrike V,

$$\begin{aligned} v_{44} &= \sqrt{22 - (-1)^2 - (-2)^2 - 1^2} = 4, \\ v_{54} &= \frac{1}{4}(7 - 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1) = 2, \\ v_{55} &= \sqrt{14 - 2^2 - (-1)^2 - (-1)^2 - 2^2} = 2, \end{aligned}$$

in rezultat je

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & 3 & & & \\ 2 & 1 & 2 & & \\ -1 & -2 & 1 & 4 & \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.6 Naloge

1. Izračunajte LU razcep brez pivotiranja danih matrik:

   (a)
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

   (b)
   $$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix},$$

   (c)
   $$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

   (d)
   $$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

   (e)
   $$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix},$$

   (f)
   $$F = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix},$$

   (g)
   $$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 2 & 5 & -3 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{3} & 1 & \\ -\frac{4}{3} & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & \frac{17}{2} & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{5}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{17}{7} & 1 \end{bmatrix}.$$

(d)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & -15 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

(f)

$$F = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{19}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{46}{7} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{4}{9} & 1 & \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}.$$

(g)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Postopka ne moremo nadaljevati, saj je pivot enak 0. V tem primeru moramo uporabiti pivotiranje (naloga 12).

2. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 4 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -3 & 1 & \\ 4 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1, \\
-3y_1 + y_2 &= 0 \Rightarrow y_2 = 3, \\
4y_1 - \frac{4}{3}y_2 + y_3 &= 4 \Rightarrow y_3 = 4.
\end{aligned}
$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},
$$

torej

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{3}x_3 &= 4 \Rightarrow x_3 = -\frac{12}{5}, \\
-3x_2 + 4x_3 &= 3 \Rightarrow x_2 = -\frac{21}{5}, \\
2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{5},
\end{aligned}
$$

in rešitev sistema je $x = [\frac{4}{5}, -\frac{21}{5}, -\frac{12}{5}]^T$.

3. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 2 & -7 & -7 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ -4 & -1 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$
\begin{aligned}
A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -7 & -4 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U, \\
L &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -1 & 0 & 1 & \\ -4 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ 2y_1 + y_2 &= 7 \Rightarrow y_2 = 5, \\ -y_1 + y_3 &= 0 \Rightarrow y_3 = 1, \\ -4y_1 + 3y_2 - 5y_3 + y_4 &= 3 \Rightarrow y_4 = -3. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_4 &= -3, \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \Rightarrow x_3 = 2, \\ -3x_2 + x_3 &= 5 \Rightarrow x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 1 \Rightarrow x_1 = -2, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [-2, -1, 2, -3]^T$.

4. S pomočjo LU razcepa rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunamo LU razcep za A,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 8, \\ -2y_1 + y_2 &= -14 \Rightarrow y_2 = 2, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 &= 7 \Rightarrow y_3 = -5, \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 &= -16 \Rightarrow y_4 = -1. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_4 &= -1, \\ -2x_3 + 3x_4 &= -5 \Rightarrow x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \Rightarrow x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 8 \Rightarrow x_1 = 1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [1, -1, 1, -1]^T$.

5. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 18, \\ 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

To je matrika iz naloge 1e, zato je

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{15}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 5, \\ 2y_1 + y_2 &= 18 \Rightarrow y_2 = 8, \\ 3y_1 + \frac{15}{8}y_2 + y_3 &= 6 \Rightarrow y_3 = -24. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -24 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} -12x_3 &= -24 \Rightarrow x_3 = 2, \\ -8x_2 &= 8 \Rightarrow x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \Rightarrow x_1 = 1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [1, -1, 2]^T$.

6. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 8x_2 + 6x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 5x_3 &= -11. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= 0, \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= -11 \Rightarrow y_3 = -11. \end{aligned}$$

Rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} 6x_3 = -11 &\Rightarrow x_3 = -\frac{11}{6}, \\ 8x_2 + 6x_3 = 0 &\Rightarrow x_2 = \frac{11}{8}, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 &\Rightarrow x_1 = \frac{11}{12}, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [\frac{11}{12}, \frac{11}{8}, -\frac{11}{6}]^T$.

7. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ 2y_1 + y_2 &= 6 \Rightarrow y_2 = 6, \\ 3y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 &= -4 \Rightarrow y_3 = -6. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} -2x_3 &= -6 \Rightarrow x_3 = 3, \\ -3x_2 + 3x_3 &= 6 \Rightarrow x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \Rightarrow x_1 = 2, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [2, 1, 3]^T$.

8. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 4z &= 5, \\ 6x + 19y + 12z &= 6, \\ 2x + 8y + 14z &= 7. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 19 & 12 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 6 & 19 & 12 \\ 2 & 8 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $L\tilde{y} = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= 5, \\ 3\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 &= 6 \Rightarrow \tilde{y}_2 = -9, \\ \tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 &= 7 \Rightarrow \tilde{y}_3 = 20. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $U\tilde{x} = \tilde{y}$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 20 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} 10z &= 20 \Rightarrow z = 2, \\ y &= -9, \\ 2x + 6y + 4z &= 5 \Rightarrow x = \frac{51}{2}, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = \frac{51}{2},\ y = -9,\ z = 2.$

9. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14, \\ -2x_1 - x_3 &= -7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 13. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 14, \\ -2y_1 + y_2 &= -7 \Rightarrow y_2 = 21, \\ 2y_1 - \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 13 \Rightarrow y_3 = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_3 &= 1, \\ 6x_2 + 9x_3 &= 21 \Rightarrow x_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 14 \Rightarrow x_1 = 3, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [3, 2, 1]^T$.

10. S pomočjo LU razcepa rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zdaj pa poiščimo LU razcep matrike sistema,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ -2 & -2 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešimo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ -2 & -2 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_1 + y_2 &= 2 \Rightarrow y_2 = 1, \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 &= 3 \Rightarrow y_3 = 7, \\ 2y_1 + y_2 + y_4 &= 1 \Rightarrow y_4 = -2. \end{aligned}$$

Zdaj pa rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

torej

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -2, \\
-x_3 + 2x_4 = 7 &\Rightarrow x_3 = -11, \\
-x_2 - 2x_3 = 1 &\Rightarrow x_2 = 21, \\
x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 &\Rightarrow x_1 = -60,
\end{aligned}
$$

in rešitev sistema je $x = [-60, 21, -11, -2]^T$.

11. Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem danih matrik:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

(a) Poiščemo pivot v matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ \mathbf{2} & 7 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = U, \; L = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Poiščemo pivot v matriki

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zamenjamo 1. in 2. vrstico,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Izračunajte LU razcep z delnim pivotiranjem za matriko iz točke 1g.

Rešitev. Poiščemo pivot v matriki

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 3. vrstico

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

in naredimo korak LU razcepa,

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -\mathbf{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 3. in 4. vrstico,

$$G \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U, \; P = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem rešite sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \mathbf{4} & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} = U, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo 1. in 2. vrstico, zato je

$$P = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= -8, \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 &= 5 \Rightarrow y_2 = 9, \\ \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 13 \Rightarrow y_3 = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ \frac{21}{2} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}x_3 = \frac{21}{2} &\Rightarrow x_3 = 3, \\ 9x_2 = 9 &\Rightarrow x_2 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 2x_3 = -8 &\Rightarrow x_1 = -1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = [-1, 1, 3]^T$.

14. S pomočjo LU razcepa z delnim pivotiranjem rešite sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -1, \\ 5x_1 + 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep z delnim pivotiranjem,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{5} & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{13}{5} & 4 \\ 0 & \boldsymbol{\frac{16}{5}} & -2 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{5} & 1 & \\ \frac{2}{5} & & 1 \end{bmatrix}.$$

Zamenjali smo 1. in 3. vrstico. Zdaj zamenjamo 2. in 3. vrstico, zato je

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Nadaljujemo z razcepom,

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & \frac{13}{5} & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{8} \end{bmatrix} = U,\ L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{5} & 1 & \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{16} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{2}{5} & 1 & \\ \frac{1}{5} & \frac{13}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, \\ \frac{2}{5}y_1 + y_2 &= 6 \Rightarrow y_2 = \frac{26}{5}, \\ \frac{1}{5}y_1 + \frac{13}{16}y_2 + y_3 &= -1 \Rightarrow y_3 = -\frac{45}{8}. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{45}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{26}{5} \\ -\frac{45}{8} \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} x_3 &= -1, \\ \frac{16}{5}x_2 - 2x_3 &= \frac{26}{5} \Rightarrow x_2 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 &= 2 \Rightarrow x_1 = 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je $x = [0, 1, -1]^T$.

15. Rešite sistem s pomočjo LU razcepa s kompletnim pivotiranjem:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep s kompletnim pivotiranjem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & \mathbf{4} & 2 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 1. in 3. vrstico, 1. in 2. stolpec,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Naredimo korak LU algoritma brez pivotiranja,

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix},$$

zamenjamo 2. in 3. vrstico, 2. in 3. stolpec,

$$A \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Ly = Pb$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 &= 1 \Rightarrow y_2 = 2, \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 &= 4 \Rightarrow y_3 = 2. \end{aligned}$$

Rešimo sistem $U\tilde{x} = y$,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= 2, \\ 2\tilde{x}_2 &= 2 \Rightarrow \tilde{x}_2 = 1, \\ 4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 &= 2 \Rightarrow \tilde{x}_1 = 1, \end{aligned}$$

in rešitev sistema je $x = Q\tilde{x} = [2, 1, 1]^T$.

16. Izračunajte $\det A$ z uporabo LU razcepa,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

in preštejte število operacij.

Rešitev. Izračunajmo LU razcep matrike A,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \ L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{3}{2} & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker bi morali deliti z 0, uporabimo pivotiranje in zamenjamo 2. in 3. vrstico,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \ L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{2} & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & 1 \end{bmatrix}, \ P = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Nadaljujmo z LU razcepom,

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U,$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{2} & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Velja $PA = LU$, torej $\det(PA) = \det P \cdot \det A = \det L \cdot \det U$,

$$-1 \cdot \det A = 1 \cdot \left(2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot (-2) \cdot 1\right) = 14,$$

torej je $\det A = -14$. Ker smo enkrat menjali vrstici, je $\det P = -1$. Če bi menjali sodo število vrstic, bi bila $\det P = 1$.

Število operacij, ki so potrebne za izračun $\det A$, je

$$\underbrace{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{n-1}_{\det U}.$$

17. Sestavite učinkovit algoritem za LU razcep brez pivotiranja tridiagonalne matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_3 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

in preštejte število operacij.

Pomagajte si s primerom na matriki

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo LU razcep matrike B,

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{20}{11} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{7}{11} & 1 \end{bmatrix}.$$

Torej je matrika L oblike

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ell_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix},$$

matrika U pa oblike

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo produkt, saj hočemo $A = LU$,

$$
L \cdot U = \begin{bmatrix}
u_1 & v_1 & 0 & \dots & & \\
\ell_2 u_1 & \ell_2 v_1 + u_2 & v_2 & 0 & \dots & \\
0 & \ell_3 u_2 & \ell_3 v_2 + u_3 & v_3 & \dots & \\
 & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & \ell_{n-1} u_{n-2} & \ell_{n-1} v_{n-2} + u_{n-1} & v_{n-1} & \\
 & & & \ell_n u_{n-1} & \ell_n v_{n-1} + u_n &
\end{bmatrix},
$$

zdaj pa primerjajmo istoležne elemente matrik,

$$
\begin{aligned}
v_i &= b_i, \\
u_1 &= a_1, \\
\ell_2 &= \frac{c_2}{u_1}, \\
u_2 &= a_2 - \ell_2 v_1,
\end{aligned}
$$

v $i-$ti vrstici dobimo:

$$
\begin{aligned}
\ell_i u_{i-1} = c_i &\Rightarrow \ell_i = \frac{c_i}{u_{i-1}}, \\
\ell_i v_{i-1} + u_i = a_i &\Rightarrow u_i = a_i - \ell_i v_{i-1}.
\end{aligned}
$$

Algoritem je torej:

```
1   u_1 = a_1,  v_1 = b_1
2   i = 2, 3, ..., n
3       v_i = b_i
4       ℓ_i = c_i / u_{i-1}
5       u_i = a_i - ℓ_i v_{i-1}
```

Preštejmo število operacij: v četrti vrstici algoritma imamo 1 deljenje, v peti vrstici pa 2 operaciji (množenje in odštevanje). Število operacij je torej enako

$$\sum_{i=2}^{n} 3 = 3(n-1) = 3n - 3.$$

Za polno matriko je število operacij $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.

18. Rešite sistem $Ax = b$, kjer je A tridiagonalna matrika, in preštejte število operacij. Pomagajte si z rezultatom iz naloge 17.

Rešitev. Sistem bomo rešili v treh korakih,

(a) LU razcep,

$$A = LU,$$

(b) prema substitucija,

$$Ly = b,$$

(c) obratna substitucija,

$$Ux = y.$$

Najprej rešujemo sistem $Ly = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \ell_2 & 1 & & & \\ & \ell_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ell_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1, \\ \ell_2 y_1 + y_2 &= b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - \ell_2 y_1, \\ \ell_3 y_2 + y_3 &= b_3 \Rightarrow y_3 = b_3 - \ell_3 y_2, \\ i-&\text{ta vrstica:} \\ \ell_i y_{i-1} + y_i &= b_i \Rightarrow y_i = b_i - \ell_i y_{i-1}. \end{aligned}$$

Algoritem je torej:

$y_1 = b_1$

$i = 2, 3, \ldots, n$

$\quad y_i = b_i - \ell_i y_{i-1}$

Število operacij, ki jih potrebujemo, je $2(n-1) = 2n - 2$.

Zdaj rešimo še sistem $Ux = y$,

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & & & \\ & u_2 & v_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} u_n x_n = y_n &\Rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_n}, \\ u_{n-1} x_{n-1} + v_{n-1} x_n = y_{n-1} &\Rightarrow x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - v_{n-1} x_n}{u_{n-1}}, \\ u_{n-2} x_{n-2} + v_{n-2} x_{n-1} = y_{n-2} &\Rightarrow x_{n-2} = \frac{y_{n-2} - v_{n-2} x_{n-1}}{u_{n-2}}, \\ i-\text{ta vrstica: } x_i &= \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}, \end{aligned}$$

in algoritem je:

$x_n = \frac{y_n}{u_n}$
$i = n-1, n-2, \ldots, 1$
$\quad x_i = \frac{y_i - v_i x_{i+1}}{u_i}$

Število operacij, ki jih potrebujemo, je

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} 3 = 1 + 3(n-1) = 3n - 2,$$

torej za rešitev celotnega sistema potrebujemo

$$\underbrace{3n + \mathcal{O}(1)}_{\text{LU razcep}} + \underbrace{2n + \mathcal{O}(1)}_{\text{prema subst.}} + \underbrace{3n + \mathcal{O}(1)}_{\text{obratna subst.}} = 8n + \mathcal{O}(1)$$

operacij.

Da algoritem deluje, morajo biti vsi $u_i \neq 0$. Kdaj se zgodi, da je kakšen $u_i = 0$? Oglejmo si determinanto

$$\det A = \det L \cdot \det U = 1 \cdot u_1 u_2 \cdots u_n,$$

torej je nek $u_i = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$, kar pomeni, da A ni obrnljiva in imamo težave z reševanjem sistema. Takrat ni rešitve ali pa jih je neskončno, taki sistemi pa nas ne zanimajo.

19. Izračunajte razcep Choleskega za matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 13 & 23 & 8 & 8 \\ 4 & 23 & 77 & 32 & 32 \\ 1 & 8 & 32 & 30 & 30 \\ 1 & 8 & 32 & 30 & 55 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo elemente po algoritmu,

$$V_A = \begin{bmatrix} \sqrt{1} = 1 & & & & \\ \frac{1}{1} \cdot 2 = 2 & \sqrt{13 - 2^2} = 3 & & & \\ \frac{1}{1} \cdot 4 = 4 & \frac{1}{3}(23 - 2 \cdot 4) = 5 & \sqrt{77 - 4^2 - 5^2} = 6 & & \\ \frac{1}{1} \cdot 1 = 1 & \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1) = 2 & \frac{1}{6}(32 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5) = 3 & \sqrt{30 - 1^2 - 2^2 - 3^2} = 4 & \\ \frac{1}{1} \cdot 1 = 1 & \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1) = 2 & \frac{1}{6}(32 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5) = 3 & \frac{1}{4}(30 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = 4 & \sqrt{55 - 1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2} = 5 \end{bmatrix},$$

rezultat je torej matrika

$$V_A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 3 & & & \\ 4 & 5 & 6 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še razcep za matriko B,

$$V_B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

20. Preštejte število operacij, ki jih potrebujete za reševanje sistema $Ax = b$, kjer je $A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ x, b \in \mathbb{C}^n$.

Rešitev. Zapišimo

$$\begin{aligned} A &= A_1 + iA_2, \\ x &= x_1 + ix_2, \\ b &= b_1 + ib_2, \end{aligned}$$

torej lahko sistem $Ax = b$ zapišemo kot

$$(A_1 + iA_2)(x_1 + ix_2) = b_1 + ib_2.$$

Ko primerjamo realni in imaginarni komponenti, dobimo

$$\begin{aligned} A_1x_1 - A_2x_2 &= b_1, \\ A_2x_1 + A_1x_2 &= b_2, \end{aligned}$$

v matrični obliki je to

$$\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

kar je realni sistem dimenzije $2n \times 2n$. Za reševanje torej potrebujemo $\frac{2}{3}\,(2n)^3 + \mathcal{O}(n^2) = \frac{16n^3}{3}$ operacij v realni aritmetiki.

Preštejmo še število operacij, ki jih potrebujemo za standardni LU razcep v kompleksni aritmetiki. Najprej preštejmo število operacij v realni aritmetiki, ki jih potrebujemo za izračun ene kompleksne operacije. Naj bosta $x = a + bi,\ y = c + di$ kompleksni števili. Njuno vsoto ali razliko izračunamo kot

$$x \pm y = (a \pm c) + i(b \pm d),$$

torej za izračun potrebujemo 2 realni operaciji. Produkt izračunamo kot

$$x \cdot y = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

torej potrebujemo 6 realnih operacij. Za kvocient

$$\frac{x}{y} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2},$$

pa potrebujemo 11 realnih operacij.

V algoritmu LU razcepa je

(a) število deljenj

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} 1 &= \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) = (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 \\ &= \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n),\end{aligned}$$

(b) število množenj

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (n - j) &= \sum_{j=1}^{n-1} (n - j)^2 \\ = \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6} &= \frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2),\end{aligned}$$

(c) število odštevanj

$$\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2).$$

Število realnih operacij, ki jih potrebujemo za reševanje kompleksnega sistema je torej

$$\begin{aligned}&\underbrace{11 \cdot \left(\frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n)\right)}_{\text{deljenje}} + \underbrace{6 \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)\right)}_{\text{množenje}} + \underbrace{2 \cdot \left(\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)\right)}_{\text{odštevanje}} \\ &= \frac{8}{3} n^3 + \mathcal{O}(n^2).\end{aligned}$$

Poglavje 7

Iterativno reševanje sistemov linearnih enačb

Rešujemo sistem $Ax = b$. Sistem prevedemo na ekvivalentni sistem $x = Rx + c$, ki ga rešujemo z iteracijo

$$x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c, \ r = 0, 1, \ldots.$$

Matriko R imenujemo *iteracijska matrika.* Iterativne metode uporabljamo za reševanje velikih sistemov enačb $Ax = b$, kjer je večina elementov matrike enakih 0.
Izrek. Zaporedje vektorjev, ki jih izračunamo po vektorski formuli $x^{(r+1)} = Rx^{(r)} + c$, konvergira za vsak $x^{(0)}$ natanko takrat, ko je $\rho(R) < 1$, tj. natanko takrat, ko so vse lastne vrednosti matrike R po absolutni vrednosti manjše od 1.

7.1 Jacobijeva iteracija

Algoritem:

$r = 0, 1, 2, \ldots$

$\quad k = 1, 2, \ldots, n$

$$\qquad x_k^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{kj} x_j^{(r)} \right).$$

V matrični obliki to pomeni, da matriko zapišemo kot $A = L + D + U$, kjer je L strogo spodnje trikotna matrika, D diagonalna matrika in U strogo zgornje trikotna matrika. Potem sistem zapišemo kot

$$Dx^{(r+1)} = -(L + U)x^{(r)} + b.$$

Pri Jacobijevi iteraciji je iteracijska matrika enaka

$$R_J = -D^{-1}(L + U).$$

7.2 Gauss - Seidlova iteracija

Algoritem:

$r = 0, 1, 2, \ldots$

$\quad k = 1, 2, \ldots, n$

$$x_k^{(r+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j^{(r+1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j^{(r)} \right).$$

V matrični obliki to pomeni, da matriko zapišemo kot $A = L + D + U$, kjer je L strogo spodnje trikotna matrika, D diagonalna matrika in U strogo zgornje trikotna matrika. Sistem zapišemo kot

$$(L + D)x^{(r+1)} = -Ux^{(r)} + b.$$

Pri Gauss-Seidlovi iteraciji je iteracijska matrika enaka

$$R_{GS} = -(L + D)^{-1}U.$$

Izrek. Če je matrika A simetrična pozitivno definitna, potem Gauss-Seidlova iteracija konvergira za poljuben $x^{(0)}$.

Pravimo, da je matrika *strogo diagonalno dominantna po vrsticah*, če velja

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|, \ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Izrek. Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija konvergirata za poljuben začetni približek $x^{(0)}$ za matrike, ki so po vrsticah strogo diagonalno dominantne.

7.2.1 Zgled

Poglejmo, kako se Jacobijeva in Gauss-Seidlova iteracija obnašata pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

V Octave vnesemo podatka A in b, izberemo začetni približek $x^{(0)} = \mathbf{0}$ in zahtevano natančnost 10^{-10}. Uporaba ukazov v Octaveu je zapisana v skripti `test_iteracija_linsist` ([1]). V spodnji tabeli so rezultati, ki jih vrneta funkciji `jacobi` in `gauss_seidel` ([1]). Za primerjavo je navedena tudi točna rešitev sistema in razlika približka od točne rešitve. Za dobljena približka porabimo 44 korakov Jacobijeve iteracije oz. 22 korakov Gauss-Seidlove iteracije. Gauss-Seidlova iteracija je približno dvakrat hitrejša od Jacobijeve.

Jacobi	napaka	Gauss-Seidel	napaka	točna rešitev
-0.1751724138	$2.05 \cdot 10^{-11}$	-0.1751724138	$-2.15 \cdot 10^{-11}$	-0.1751724138
-0.5337931034	$3.48 \cdot 10^{-11}$	-0.5337931035	$-2.09 \cdot 10^{-12}$	-0.5337931035
0.4165517241	$-8.95 \cdot 10^{-12}$	0.4165517241	$-1.43 \cdot 10^{-11}$	0.4165517241
1.371034483	$-3.80 \cdot 10^{-11}$	1.371034483	$-2.54 \cdot 10^{-12}$	1.371034483

Če metodi preizkusimo pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

ne konvergirata.

7.3 Metoda SOR

Vpeljemo *relaksacijski parameter* ω. Z ustrezno izbranim ω pospešimo konvergenco iteracije. Nov približek dobimo iz

$$x_k^{(r+1)(\mathrm{SOR})} = x_k^{(r)} + \omega(x_k^{(r+1)(\mathrm{GS})} - x_k^{(r)}),$$

kar je isto kot

$$x_k^{(r+1)} = x_k^{(r)} + \frac{\omega}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j^{(r+1)} - \sum_{j=k}^{n} a_{kj} x_j^{(r)} \right).$$

Pri $\omega = 1$ je metoda SOR kar Gauss-Seidlova metoda.
Zapišimo metodo SOR še v matrični obliki

$$(\omega L + D) x^{(r+1)} = ((1-\omega)D - \omega U)\, x^{(r)} + \omega b,$$

torej je

$$R_{SOR}(\omega) = (\omega L + D)^{-1} \left((1-\omega)D - \omega U\right).$$

Izrek. Metoda SOR ne konvergira za vsak začetni približek $x^{(0)}$, če $\omega \notin (0,2)$.
Izrek. Če je matrika A simetrična pozitivno definitna, potem metoda SOR konvergira za poljuben začetni približek $x^{(0)}$ za vsak $\omega \in (0,2)$.

7.4 Naloge

1. Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije z začetnim približkom $x^{(0)} = [0,0]^T$ za reševanje sistema $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Sistem zapišimo v obliki z enačbami, potem pa iz prve enačbe izrazimo prvo spremenljivko, iz druge drugo, ..., nato uporabimo vrednosti spremenljivk za izračun.

Dan je sistem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 11, \\ 5x_1 + 7x_2 &= 13, \end{aligned}$$

od koder izrazimo

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(11 - 3x_2\right), \\ x_2 &= \frac{1}{7}\left(13 - 5x_1\right). \end{aligned}$$

Za izračun uporabimo dan začetni približek v prvem koraku in izračunan prvi približek v drugem:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(11 - 3 \cdot 0\right) = \frac{11}{2}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{7}\left(13 - 5 \cdot 0\right) = \frac{13}{7}, \\ x_1^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(11 - 3 \cdot \frac{13}{7}\right) = \frac{19}{7}, \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{7}\left(13 - 5 \cdot \frac{11}{2}\right) = -\frac{29}{14}. \end{aligned}$$

2. Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije in korak Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $x^{(0)} = [0,0,0]^T$ pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Sistem zapišimo v obliki z enačbami

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= -1, \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned}$$

in izrazimo spremenljivke

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{5}\left(2 - 2x_2 + x_3\right), \\ x_2 &= \frac{1}{7}\left(-1 - 3x_1 - 3x_3\right), \\ x_3 &= \frac{1}{6}\left(1 - x_1 + 4x_2\right). \end{aligned}$$

Pri Jacobijevi iteraciji v prvem koraku uporabimo vrednosti začetnega približka in dobimo

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - 2 \cdot 0 + 0\right) = \frac{2}{5} = 0.4, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{7}\left(-1 - 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0\right) = -\frac{1}{7} = 0.1429, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{6}\left(1 - 0 + 4 \cdot 0\right) = \frac{1}{6} = 0.1667. \end{aligned}$$

V drugem koraku Jacobijeve metode uporabimo izračunane vrednosti:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{5}\left(2 + 2 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{6}\right) = \frac{103}{210} = 0.4905, \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{7}\left(-1 - 3 \cdot \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{1}{6}\right) = -\frac{27}{70} = -0.3857, \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{5} - 4 \cdot \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{210} = 0.0048. \end{aligned}$$

Pri Gauss-Seidlovi metodi vsakič uporabimo zadnji približek, ki ga imamo na voljo:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{5}\left(2 - 2 \cdot 0 + 0\right) = \frac{2}{5} = 0.4, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{7}\left(-1 - 3 \cdot \frac{2}{5} - 3 \cdot 0\right) = -\frac{11}{35} = -0.3143, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{5} - 4 \cdot \frac{11}{35}\right) = -\frac{23}{210} = -0.1095. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je [0.4981, −0.3050, −0.1197]. Tudi v tem primeru lahko vidimo, da Gauss-Seidlova iteracija konvergira hitreje, saj je že po prvem koraku bližje pravi rešitvi, kot je Jacobijeva iteracija po dveh korakih.

3. Naredite dva koraka Jacobijeve iteracije in korak Gauss-Seidlove iteracije z začetnim približkom $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ pri reševanju sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Preoblikujmo sistem v obliko z enačbami

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 1, \\ 2x_2 - x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1, \end{aligned}$$

in izrazimo spremenljivke:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(1 - x_3\right), \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(2 + x_3\right), \\ x_3 &= \frac{1}{4}\left(-1 - x_1 + x_2\right). \end{aligned}$$

Dva koraka Jacobijeve iteracije nam data približke

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(1 - 0\right) = \frac{1}{2}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(2 + 0\right) = 1, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(-1 - 0 + 0\right) = -\frac{1}{4}, \\ x_1^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}, \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}, \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Po Gauss-Seidlovi metodi pa dobimo približke

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(1 - 0\right) = \frac{1}{2}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(2 + 0\right) = 1, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(-1 - \frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. Naredite dva koraka Gauss-Seidlove metode z danim začetnim približkom $x^{(0)} = [1, 2, -1]^T$ za sistem

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev. Iz sistema po vrsti izrazimo spremenljivke

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\left(1 + x_2 - x_3\right), \\ x_2 &= \frac{1}{6}\left(-3x_1 - 2x_3\right), \\ x_3 &= \frac{1}{7}\left(4 - 3x_1 - 3x_2\right). \end{aligned}$$

V prvem koraku uporabimo dan približek oz. zadnjo izračunano vrednost:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{3}\left(1 + 2 + 1\right) = \frac{4}{3}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{6}\left(-3 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 1\right) = -\frac{1}{3}, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{7}\left(4 - 3 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

V drugem koraku prav tako uporabimo zadnjo izračunano vrednost spremenljivke:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{11}{63}, \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{6}\left(-3 \cdot \frac{11}{63} - 2 \cdot \frac{1}{7}\right) = -\frac{17}{126}, \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{7}\left(4 - 3 \cdot \frac{11}{63} + 3 \cdot \frac{17}{126}\right) = \frac{163}{294}. \end{aligned}$$

5. Naredite en korak Gauss-Seidlove iteracije za dane sisteme linearnih enačb z začetnim približkom **0**:

(a) $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= 19, \\ x_1 - 3x_2 + 12x_3 &= 31, \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 &= 13, \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x - y + z &= -7, \\ 20x + 3y - 2z &= 51, \\ 2x + 8y + 4z &= 25, \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 10x - y &= 1, \\ -x + 10y - z &= 1, \\ -y + 10z - w &= 1, \\ -z + 10w &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev.

(a) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(3 - x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right) = \frac{3}{4}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{7}\left(19 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{7}\left(19 - 2 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{2}, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{12}\left(31 - x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{12}\left(31 - \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{5}{2}\right) = \frac{151}{48}. \end{aligned}$$

(b) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(13 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{13}{10}, \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(13 - 2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{10}\left(13 - 2 \cdot \frac{13}{10}\right) = \frac{26}{25}, \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(13 - 2x_1^{(1)} - x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}\left(13 - 2 \cdot \frac{13}{10} - \frac{26}{25}\right) = \frac{117}{125}. \end{aligned}$$

(c) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -7 + y^{(0)} - z^{(0)} = -7, \\ y^{(1)} &= \frac{1}{3}\left(51 - 20x^{(1)} + 2z^{(0)}\right) = \frac{1}{3}\left(51 - 20 \cdot (-7)\right) = \frac{191}{3}, \\ z^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(25 - 2x^{(1)} - 8y^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 2 \cdot 7 - 8 \cdot \frac{191}{3}\right) = -\frac{1411}{12}. \end{aligned}$$

(d) Izrazimo spremenljivke in dobimo sistem, v katerega vstavimo vrednosti spremenljivk,

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + y^{(0)}\right) = \frac{1}{10},\\
y^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + x^{(1)} + z^{(0)}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{11}{100},\\
z^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + y^{(1)} + w^{(0)}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{11}{100}\right) = \frac{111}{1000},\\
w^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(1 + z^{(1)}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{111}{1000}\right) = \frac{1111}{10000}.
\end{aligned}
$$

6. Naredite en korak Jacobijeve in en korak Gauss-Seidlove iteracije za sistem linearnih enačb

$$
\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6,\\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25,\\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= 11,\\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15.
\end{aligned}
$$

V obeh primerih uporabite začetni približek $x^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$. V Octaveu primerjajte hitrost konvergence obeh metod.

Rešitev. Izrazimo spremenljivke v sistemu in dobimo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}\left(6 + x_2 - 2x_3\right),\\
x_2 &= \frac{1}{11}(25 + x_1 + x_3 - 3x_4),\\
x_3 &= \frac{1}{10}(11 - 2x_1 + x_2 + x_4),\\
x_4 &= \frac{1}{8}(15 - 3x_2 + x_3).
\end{aligned}
$$

Pri Jacobijevi metodi na desni strani vedno uporabimo približek iz prejšnjega koraka, zato je rešitev

$$
x^{(1)} = \left[\frac{3}{5}, \frac{25}{11}, \frac{11}{10}, \frac{15}{8}\right]^T.
$$

Pri Gauss-Seidlovi metodi pa uporabimo tudi vrednosti iz tekočega koraka, zato dobimo

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{3}{5},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}\left(25+\frac{3}{5}\right) = \frac{128}{55},\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(11-2\cdot\frac{3}{5}+\frac{128}{55}\right) = \frac{667}{550},\\
x_4^{(1)} &= \frac{1}{8}\left(15-3\cdot\frac{128}{55}+\frac{667}{550}\right) = \frac{5077}{4400}.
\end{aligned}$$

Primerjajmo hitrost konvergence. Vnesimo matriko sistema, desno stran in začetni približek v Octave. Rezultate izračunajmo do natančnosti 10^{-10}. Uporabimo programa `jacobi` in `gauss_seidel` ([1]) in poglejmo, ali iteraciji v tem primeru konvergirata in če da, kam. Ukazi so zapisani v skripti `test_iteracija_konvergenca`.

Jacobijeva iteracija se konča po 29 korakih, Gauss-Seidlova pa po 11 korakih. Oba rezultata se res za manj kot 10^{-10} razlikujeta od točne rešitve sistema, torej iteraciji konvergirata k točni rešitvi sistema.

7. Izračunajte prva dva približka za rešitev sistema

$$\begin{aligned}
12x_1 - 3x_2 + x_3 &= 10,\\
-x_1 + 9x_2 + 2x_3 &= 10,\\
x_1 - x_2 + 10x_3 &= 10,
\end{aligned}$$

po Jacobijevi in Gauss-Seidlovi metodi za začetni približek $[1,0,1]^T$.

Rešitev. Izrazimo spremenljivke v sistemu in dobimo

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{12}(10+3x_2-x_3),\\
x_2 &= \frac{1}{9}(10+x_1-2x_3),\\
x_3 &= \frac{1}{10}(10-x_1+x_2).
\end{aligned}$$

Pri Jacobijevi metodi na desni strani vedno uporabimo približek iz prejšnjega koraka,

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{12}\left(10+3\cdot 0-1\right) = \frac{3}{4},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}(10+1-2\cdot 1) = 1,\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(10-1+0) = \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{12}\left(10 + 3\cdot 1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{121}{120},\\
x_2^{(2)} &= \frac{1}{9}\left(10 + \frac{3}{4} - 2\cdot\frac{9}{10}\right) = \frac{179}{180},\\
x_3^{(2)} &= \frac{1}{10}\left(10 - \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{41}{40}.
\end{aligned}$$

Pri Gauss-Seidlovi metodi uporabimo tudi vrednosti iz tekočega koraka, zato dobimo

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{3}{4},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left(10 + \frac{3}{4} - 2\cdot 1\right) = \frac{35}{36},\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(10 - \frac{3}{4} + \frac{35}{36}\right) = \frac{46}{45}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{12}\left(10 + 3\cdot\frac{35}{36} - \frac{46}{45}\right) = \frac{2141}{2160},\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{9}\left(10 + \frac{2141}{2160} - 2\cdot\frac{46}{45}\right) = \frac{3865}{3888},\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(10 - \frac{2141}{2160} + \frac{3865}{3888}\right) = \frac{24307}{24300}.
\end{aligned}$$

8. Preuredite enačbe v sistemu

$$\begin{aligned}
-x_1 + 6x_2 &= 1,\\
x_1 - x_2 + 4x_3 &= -1,\\
-3x_1 + x_2 + x_3 &= 4,
\end{aligned}$$

tako da bo Jacobijeva iteracija zagotovo konvergirala.

Rešitev. Iteracija konvergira, če je matrika sistema strogo diagonalno dominantna. Zapišimo matriko sistema z dodanim stolpcem $b = [1, -1, 4]^T$ in jo z menjavo vrstic preoblikujmo v strogo diagonalno dominantno matriko,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 4 & -1\\ -3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 4 & -1\\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 6 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right].$$

Zadnja matrika je strogo diagonalno dominantna po vrsticah, saj velja

$$\begin{aligned}|-3| &> |1| + |1|,\\ |6| &> |-1| + |0|,\\ |4| &> |1| + |-1|.\end{aligned}$$

Menjava vrstic je potrebna tudi takrat, ko je kakšen diagonalni element enak 0 (takrat D ni obrnljiva).

9. Pokažite, da za sisteme dimenzije 2×2 Jacobijeva iteracija konvergira natanko takrat, ko konvergira Gauss-Seidlova iteracija.

Rešitev. Iteraciji konvergirata, kadar je spektralni radij matrike R_J oz. R_{GS} manjši od 1, tj. takrat, ko so vse lastne vrednosti po absolutni vrednosti manjše od 1. Matriki dobimo iz

$$R_J = -D^{-1}(L+U),\ R_{GS} = -(L+D)^{-1}U.$$

Zapišimo splošno matriko 2×2 sistema,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Torej so matrike, ki nastopajo zgoraj, enake

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Inverz matrike D je enak

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix},$$

zato je

$$R_J = -\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{d} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ -\frac{c}{d} & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo lastne vrednosti te matrike,

$$\det(R_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{b}{a} \\ -\frac{c}{d} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{bc}{ad} = 0,$$

torej sta lastni vrednosti $\lambda_{1,2}^{(J)} = \pm\sqrt{\frac{bc}{ad}}$. Ponovimo postopek za Gauss-Seidlovo iteracijo,

$$L + D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow (L+D)^{-1} = \frac{1}{ad}\begin{bmatrix} d & 0 \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad} & \frac{1}{d} \end{bmatrix},$$

zato je

$$R_{GS} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad} & \frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} \end{bmatrix}.$$

Lastni vrednosti izračunamo iz

$$\det(R_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{bc}{ad} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left(\frac{bc}{ad} - \lambda \right) = 0,$$

torej je $\lambda_1^{(GS)} = 0,\ \lambda_2^{(GS)} = \frac{bc}{ad}$.

Opazimo, da velja $\left|\lambda_2^{(GS)}\right| = \left(\lambda_{1,2}^{(J)}\right)^2$, od koder sledi

$$\left|\lambda_2^{(GS)}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\lambda_{1,2}^{(J)}\right| < 1,$$

kar pomeni, da Jacobijeva iteracija konvergira natanko tedaj, ko konvergira Gauss-Seidlova.

10. Recimo, da je Jacobijeva iteracija za reševanje sistema $Ax = b$ konvergentna za vsak začetni približek. Pokažite, da je tedaj konvergentna za vsak začetni približek tudi pri reševanju sistema $A^T y = c$.

Rešitev. Po izreku Jacobijeva iteracija konvergira natanko tedaj, ko je $\rho(R_J(A)) < 1$, torej je

$$\rho(R_J(A)) < 1 \text{ za } R_J(A) = -D^{-1}(L + U).$$

Poglejmo, kakšna je matrika $R_J(A^T)$ za reševanje sistema $A^T y = c$ z Jacobijevo metodo. Zapišimo $A = L + D + U$. Sledi

$$\begin{aligned} A^T y &= c \\ (L^T + D^T + U^T) y &= c \\ (\widetilde{U} + \widetilde{D} + \widetilde{L}) y &= c, \end{aligned}$$

kjer so $\widetilde{U} = L^T,\ \widetilde{D} = D^T = D,\ \widetilde{L} = U^T$. Torej je iteracijska matrika Jacobijeve metode za sistem $A^T y = c$ enaka

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_J(A^T) &= -\widetilde{D}^{-1}(\widetilde{L} + \widetilde{U}) \\ &= -D^{-1}(U^T + L^T) \\ &= -D^{-1}(L + U)^T. \end{aligned}$$

Izračunajmo transponiranko te matrike,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_J^T(A^T) &= -(L+U)(D^{-1})^T\\ &= -(L+U)D^{-1}\\ &= -DD^{-1}(L+U)D^{-1}\\ &= DR_J(A)D^{-1}.\end{aligned}$$

Torej sta si matriki $R_J(A)$ in $\widetilde{R}_J^T(A^T)$ podobni, zato imata enake lastne vrednosti in velja

$$\rho(\widetilde{R}_J(A^T)) = \rho(\widetilde{R}_J^T(A^T)) = \rho(R_J(A)) < 1.$$

Po izreku Jacobijeva iteracija pri reševanju sistema $A^Ty = c$ konvergira za vsak začetni približek.

11. Naj bo matrika A strogo diagonalno dominantna po stolpcih, naj torej za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ velja

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}|.$$

Pokažite, da je tedaj Jacobijeva iteracija za reševanje sistema $Ax = b$ konvergentna za vsak začetni približek.

Rešitev. Vemo že, da Jacobijeva iteracija konvergira za vsak začetni približek, če je matrika strogo diagonalno dominantna po vrsticah. Če je matrika A strogo diagonalno dominantna po stolpcih, je matrika A^T strogo diagonalno dominantna po vrsticah, torej Jacobijeva iteracija konvergira za vsak začetni približek pri reševanju sistema $A^Ty = d$. Potem po nalogi 10 sledi, da Jacobijeva iteracija konvergira pri reševanju sistema $(A^T)^Tx = b$, kar je enako $Ax = b$.

12. Naj bo A simetrična tridiagonalna matrika oblike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 8 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Pokažite, da Gauss-Seidlova iteracija za reševanje sistema $Ax = b$ konvergira za vsak začetni približek.

Rešitev. Pokažimo, da se za A izvede razcep Choleskega:

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

in $V \cdot V^T = A$. Vemo, da potem velja, da je matrika A simetrična pozitivno definitna. Po izreku sledi, da Gauss-Seidlova iteracija konvergira za vsak začetni približek.

13. Naj bo A simetrična tridiagonalna matrika oblike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Pokažite, da Gauss-Seidlova iteracija za reševanje sistema $Ax = b$ konvergira za vsak začetni približek.
Namig: Najprej pokažite, da velja

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & & \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & & & \\ & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & & & \\ & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{\frac{n}{n-1}} & -\sqrt{\frac{n-1}{n}} \\ & & & & \sqrt{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Zmnožimo matriki iz namiga,

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \sqrt{2}\sqrt{2} = 2, \\
a_{12} &= \sqrt{2}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -1, \\
a_{21} &= -\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{2} = -1, \\
a_{ii} &= \left(-\sqrt{\frac{i-1}{i}}\right)\left(-\sqrt{\frac{i-1}{i}}\right) + \sqrt{\frac{i+1}{i}}\sqrt{\frac{i+1}{i}} = \frac{i-1}{i} + \frac{i+1}{i} = 2, \\
a_{i,i+1} &= \sqrt{\frac{i+1}{i}}\left(-\sqrt{\frac{i}{i+1}}\right) = -1, \\
a_{i+1,i} &= \left(-\sqrt{\frac{i}{i+1}}\right)\sqrt{\frac{i+1}{i}} = -1, \\
a_{n-1,n} &= \sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) = -1, \\
a_{n,n-1} &= -\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{\frac{n}{n-1}} = -1, \\
a_{n,n} &= -\sqrt{\frac{n-1}{n}}\left(-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) + \sqrt{\frac{n+1}{n}}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{n-1}{n} + \frac{n+1}{n} = 2.
\end{aligned}
$$

Torej se za matriko A izvede razcep Choleskega in je A simetrična pozitivno definitna. Po izreku sledi, da Gauss-Seidlova iteracija konvergira za vsak začetni približek.

Poglavje 8

Reševanje predoločenih sistemov

Rešujemo sistem

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \geq n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,$$

torej je enačb več ali enako, kot je neznank (matrika A ima več ali enako vrstic kot stolpcev).
Običajno tak x, da je $Ax = b$, ne obstaja. Iščemo tak x, da se Ax "najbolj" ujema z b, tj. želimo minimizirati $\|Ax - b\|$. Če izberemo $\|.\|_2$, dobimo rešitev po *metodi najmanjših kvadratov.*

8.1 Normalni sistem

Izrek. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ m \geq n,\ b \in \mathbb{R}^m$, in naj bo A polnega ranga ($\text{rang}(A) = n$). Vektor x, ki minimizira $\|Ax - b\|_2$, je enoličen in je rešitev linearnega sistema

$$A^T Ax = A^T b.$$

Temu sistemu rečemo *normalni sistem.*
V normalnem sistemu je $A^T A$ simetrična pozitivno definitna matrika, zato ga rešujemo preko razcepa Choleskega. Za reševanje sistema torej potrebujemo

$$\underbrace{mn^2}_{\text{izračun } A^T A} + \underbrace{\frac{n^3}{3}}_{\text{razcep Choleskega}}$$

operacij. Glavni del operacij prinese izračun $A^T A$, saj je običajno m veliko večji od n.
Normalni sistem je najcenejši postopek za reševanje predoločenih sistemov, vendar je potencialno nestabilen.

8.1.1 Zgled

Dane so točke $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, m,\ m \geq 4$. Skozi te točke želimo napeljati kubični polinom $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$. V splošnem tak polinom ne obstaja. Z rešitvijo predoločenega sistema bomo dobili polinom, ki se najbolje prilega danim podatkom. Iščemo koeficiente $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, da bo

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

V splošnem iščemo funkcijo $y(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x)$, ki se najbolje prilega podatkom. V tem primeru je matrika A enaka

$$A = \left[g_j(x_i)\right]_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.1}$$

8.2 QR razcep

Rešujemo predoločen sistem $Ax = b$, kjer je $\operatorname{rang}(A) = n$. Matriko A zapišemo kot $A = QR$, kjer je $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika z ortonormiranimi stolpci, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pa zgornje trikotna matrika. Če razcep vstavimo v normalni sistem, dobimo

$$\begin{aligned} (QR)^T (QR) x &= (QR)^T b, \\ Rx &= Q^T b. \end{aligned}$$

Reševanje preko QR razcepa je bolj stabilno. Matriki Q in R izračunamo po spodnjem algoritmu, kjer matriki zapišemo po stolpcih

$$A = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n],\ Q = [q_1\ q_2\ \ldots\ q_n].$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija:

$k = 1, 2, \ldots, n$
    $q_k = a_k$
    $i = 1, 2, \ldots, k-1$
        $r_{ik} = q_i^T a_k$
        $q_k = q_k - r_{ik} q_i$
    $r_{kk} = \|q_k\|_2$
    $q_k = \frac{1}{r_{kk}} q_k$

Če četrto vrstico algoritma spremenimo v

4 $\qquad r_{ik} = q_i^T q_k,$

je algoritem bolj stabilen in ga imenujemo *modificirana Gram-Schmidtova ortogonalizacija.*

Število operacij, ki jih potrebujemo za izračun QR razcepa na ta način, je

$$2mn^2.$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija za matrike s tremi stolpci:

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & a_1 & q_2 & = & a_2 & q_3 & = & a_3 \\
r_{11} & = & \|q_1\|_2 & r_{12} & = & q_1^T a_2 & r_{13} & = & q_1^T a_3 \\
q_1 & = & \frac{1}{r_{11}} q_1 & q_2 & = & q_2 - r_{12} q_1 & r_{23} & = & q_2^T a_3 \\
 & & & r_{22} & = & \|q_2\|_2 & q_3 & = & q_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2 \\
 & & & q_2 & = & \frac{1}{r_{22}} q_2 & r_{33} & = & \|q_3\|_2 \\
 & & & & & & q_3 & = & \frac{1}{r_{33}} q_3
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = [q_1 \; q_2 \; q_3], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}.$$

8.3 Givensove rotacije

V ravnini zavrtimo vektor $x = [x_1, x_2]^T$ za kot ϕ tako, da ga pomnožimo z $R^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$, kjer sta $c = \cos\phi, \; s = \sin\phi$.

Rotacijo posplošimo na rotacijo v ravnini (i, k) in jo poimenujemo *Givensova rotacija*

$$R_{ik}^T = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & k & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & \cdots & & c & & \cdots & & s & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & \cdots & & -s & & \cdots & & c & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}.$$

Matrika R_{ik} je ortogonalna in velja

$$
\begin{aligned}
R_{ik}^T x = y \Rightarrow y_j &= x_j, \ j \neq i, k, \\
y_i &= c x_i + s x_k, \\
y_k &= -s x_i + c x_k.
\end{aligned}
$$

Konstanti c in s izberemo tako, da bo $y_k = 0$,

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_i^2 + x_k^2}, \\
c &= \frac{x_i}{r}, \\
s &= \frac{x_k}{r}, \\
&\Rightarrow y_i = r, \ y_k = 0.
\end{aligned}
$$

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ m \geq n, \ \mathrm{rang}(A) = n$. Iščemo razširjeni QR razcep matrike A,

$$A = \widetilde{Q}\widetilde{R},$$

kjer je $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonalna matrika ($\widetilde{Q}\widetilde{Q}^T = \widetilde{Q}^T\widetilde{Q} = I$) in $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zgornje trapezna matrika. Matriki zapišemo v bločni obliki

$$\widetilde{Q} = [\underbrace{Q}_{n} \ \underbrace{Q_1}_{m-n}]\} \ m, \ \widetilde{R} = \begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \} \ n \\ \} \ m-n \end{array}$$

Matrika Q ima ortonormirane stolpce ($Q^T Q = I$), matrika R pa je zgornje trikotna.
Z ustrezno izbiro Givensovih rotacij spravimo matriko v zgornje trapezno obliko in tako dobimo matriko $\widetilde{R}$ razširjenega QR razcepa. Matrika $\widetilde{Q}$ je enaka produktu Givensovih rotacij, ki smo jih uporabili.

8.4 Householderjeva zrcaljenja

Za $w \in \mathbb{R}^n, \ w \neq 0$, definiramo *Householderjevo zrcaljenje* kot

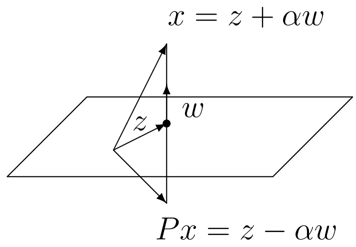
$$P = I - \frac{2}{w^T w} \, w w^T.$$

Matrika P je simetrična in ortogonalna. Velja

$$
\begin{aligned}
Pw &= -w, \\
Px &= x \text{ za } x \perp w.
\end{aligned}
$$

Matrika P predstavlja zrcaljenje preko ravnine, ki ima normalo w. Poljuben $x \in \mathbb{R}^n$ lahko zapišemo kot $x = z + \alpha w$, kjer je $z \perp w$ (slika 8.1). Potem je

$$Px = z - \alpha w.$$



Slika 8.1: Geometrijska interpretacija Householderjevega zrcaljenja.

S primerno izbranim zrcaljenjem lahko x prezrcalimo v $\pm\|x\|_2\, e_1$. Izberemo

$$w = \begin{bmatrix} x_1 \pm \|x\|_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

kjer predznak izberemo tako, da bo prva komponenta vektorja w po absolutni vrednosti čim večja.
S Householderjevimi zrcaljenji lahko matriko transformiramo v zgornje trapezno obliko:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_1} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_2} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \xrightarrow{P_3} \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \widetilde{R}.$$

Transformacije P_i so Householderjeva zrcaljenja oblike

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_1 &= I - \frac{2}{w_1^T w_1} w_1 w_1^T,\ w_1 \in \mathbb{R}^4,\ P_1 = \widetilde{P}_1, \\
\widetilde{P}_2 &= I - \frac{2}{w_2^T w_2} w_2 w_2^T,\ w_2 \in \mathbb{R}^3,\ P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \widetilde{P}_2 \end{bmatrix}, \\
\widetilde{P}_3 &= I - \frac{2}{w_3^T w_3} w_3 w_3^T,\ w_3 \in \mathbb{R}^2,\ P_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \widetilde{P}_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matriko $\widetilde{Q}$ dobimo kot $\widetilde{Q} = P_1 P_2 P_3$.

8.5 Singularni razcep

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, obstaja *singularni razcep*

$$A = U \Sigma V^T,$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni matriki in $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\Sigma = \left.\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}\right\} m,$$

matrika singularnih vrednosti, urejenih po velikosti $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$. Če je $\operatorname{rang}(A) = r \leq n$, potem je rešitev predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov enaka

$$x = \sum_{i=1}^{r} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i.$$

Singularni razcep izračunamo v korakih:

1. izračunamo $A^T A$
2. izračunamo lastne vrednosti $A^T A$, ki so rešitve enačbe $\det(A^T A - \lambda I) = 0$
3. singularne vrednosti so kvadratni koreni iz lastnih vrednosti matrike $A^T A$, uredimo jih po velikosti in zložimo v matriko Σ
4. izračunamo lastne vektorje v_i matrike $A^T A$ iz enačb $(A^T A - \lambda_i I)v_i = 0$ in jih normiramo $\rightarrow$ dobimo matriko V
5. izračunamo $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \rightarrow$ dobimo matriko U

8.6 Naloge

1. Poiščite premico, ki se najbolje prilega točkam (1,13), (2,10), (3,11), (4,8), (5,6).

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 10 \\ 11 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

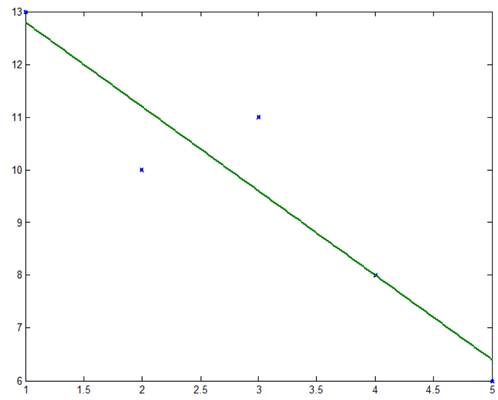
Normalni sistem je

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 128 \end{bmatrix},$$

njegova rešitev pa

$$\alpha = \left[\frac{72}{5}, -\frac{8}{5}\right]^T.$$

Torej je iskana premica $y(x) = \frac{72}{5} - \frac{8}{5}x$. Rezultat je prikazan na sliki 8.2.



Slika 8.2: Dane točke in premica, ki se jim najbolje prilega.

2. Poiščite premico, ki se najbolje prilega točkam (1,-1), (4,11), (-1,-9), (-2,-13).

   Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Rešimo ga z normalnim sistemom, $A^T A\alpha = A^T b$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 22 \end{bmatrix},$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 78 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je

$$\alpha = [-5, 4]^T,$$

torej je premica, ki jo iščemo, $y(x) = 4x - 5$.

3. Izpeljite eksplicitno formulo za enačbo premice, ki se najbolje prilega danim točkam $(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, m$.

   Rešitev. Iščemo premico $y = kx + n$. Problem zapišemo v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

   Izračunamo $A^T A$ in $A^T b$, ki nastopata v normalnem sistemu,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix}$$

   in

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}.$$

   Torej rešujemo normalni sistem

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}.$$

Vemo, da je inverz 2×2 matrike enak

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

kar uporabimo v normalnem sistemu. Torej velja

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ -\sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i + m \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{bmatrix}.$$

Eksplicitni formuli za koeficienta sta

$$n = \frac{\sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2},$$
$$k = \frac{-\sum_{i=1}^m x_i \sum_{i=1}^m y_i + m \sum_{i=1}^m x_i y_i}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}.$$

4. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rang}(A) = n$. Pokažite, da ima sistem

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

rešitev, ki ustreza rešitvi predoločenega sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Iz danega sistema dobimo matrični enačbi

$$\begin{aligned} r + Ax &= b, \\ A^T r &= 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Preuredimo prvo enačbo,

$$\begin{aligned} Ax &= b - r \\ A^T Ax &= A^T (b - r) \\ A^T Ax &= A^T b - A^T r. \end{aligned}$$

Ker velja enačba (8.2), dobimo

$$A^T Ax = A^T b,$$

kar je ravno normalni sistem za reševanje predoločenega sistema $Ax = b$.

5. V spodnji tabeli je zapisano število ribičev, ki so na določen dan lovili ribe, in število ujetih rib v tistem dnevu,

dan	število ribičev	količina ujetih rib
1	18	39
2	14	9
3	9	9
4	10	7
5	5	8
6	22	35
7	14	36
8	12	22

Poiščite linearno funkcijo, ki najbolje opisuje povezavo med številom ribičev, ki lovijo, in številom ujetih rib.

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema. Iščemo funkcijo oblike $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$, ki se najbolje prilega podatkom $\tilde{x} = [18, 14, 9, 10, 5, 22, 14, 12]^T$, $\tilde{y} = [39, 9, 9, 7, 8, 35, 36, 22]^T$. Sistem, ki ga rešujemo, je torej

$$\begin{bmatrix} 1 & 18 \\ 1 & 14 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 5 \\ 1 & 22 \\ 1 & 14 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \\ 35 \\ 36 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Zapišimo normalni sistem $A^T A \alpha = A^T \tilde{y}$,

$$\begin{bmatrix} 8 & 104 \\ 104 & 1550 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 165 \\ 2557 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je

$$\alpha_0 = -\frac{5089}{792} \doteq -6.43, \ \alpha_1 = \frac{206}{99} \doteq 2.08.$$

Linearna zveza med številom ribičev in številom ujetih rib je $y(x) = -6.43 + 2.08x$.

6. Dane so točke $\left(-1, \frac{11}{4}\right), \left(0, \frac{7}{4}\right), \left(1, \frac{1}{4}\right), \left(2, \frac{13}{4}\right)$. Poiščite parabolo, ki jih najbolje aproksimira po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Iščemo funkcijo oblike $y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. Matriko A dobimo iz (8.1), kjer za $g_j(x)$ vzamemo $1, x, x^2$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \ b = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Iščemo koeficiente $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, da bo veljalo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

v smislu najmanjših kvadratov. Sistem rešimo z normalnim sistemom $A^T A\alpha = A^T b$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} = B,$$

$$A^T b = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = z.$$

Normalni sistem $B\alpha = z$ rešimo z razcepom Choleskega, $B = V \cdot V^T$,

$$V = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & \sqrt{5} & \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem $Vw = z$,

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & \sqrt{5} & \\ 3 & \sqrt{5} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Od tod izračunamo

$$\begin{aligned} w_1 &= 4, \\ w_1 + \sqrt{5}w_2 &= 4 \Rightarrow w_2 = 0, \\ 3w_1 + \sqrt{5}w_2 + 2w_3 &= 16 \Rightarrow w_3 = 2. \end{aligned}$$

Rešimo še sistem $V^T\alpha = w$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1, \\ \sqrt{5}\alpha_1 + \sqrt{5}\alpha_2 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1, \\ 2\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 &= 4 \Rightarrow \alpha_0 = 1. \end{aligned}$$

Parabola, ki se najbolje prilega danim točkam, je torej $y(x) = x^2 - x + 1$.

7. Dane so točke (x_i, y_i),

x	1.1	1.4	2.5	2.7	3.2	3.6	4.1	4.3	4.5	4.9
y	2.14	2.60	1.15	1.19	1.88	1.55	2.65	3.80	4.46	6.35

Poiščite kvadratni polinom, ki se jim najbolje prilega po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.1 & 1.1^2 \\ 1 & 1.4 & 1.4^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4.9 & 4.9^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.14 \\ 2.60 \\ \vdots \\ 6.35 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo rešitev

$$\alpha = [6.367, -4.277, 0.856]^T.$$

Kvadratni polinom, ki ga iščemo, je $y(x) = 6.367 - 4.277\,x + 0.865\,x^2$.

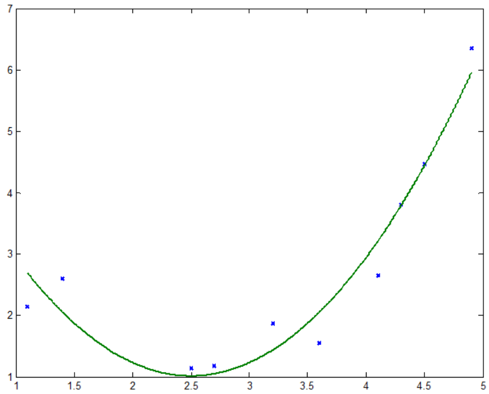
Na sliki 8.3 so narisane dane točke in kvadratna funkcija, ki se jim najbolje prilega.

8. Dane so točke (x_i, y_i),

x	0.21	0.66	0.93	1.25	1.75	2.03	2.24	2.57	2.87	2.98
y	0.25	-0.27	-1.12	-0.45	0.28	0.13	-0.27	0.26	0.58	1.03

Poiščite funkcijo oblike

$$y(x) = ae^x + b\ln x + c\sin x + d\cos x,$$



Slika 8.3: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

ki najbolje aproksimira podatke po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Zapišimo problem v obliki predoločenega sistema,

$$\begin{bmatrix} e^{0.21} & \ln(0.21) & \sin(0.21) & \cos(0.21) \\ e^{0.66} & \ln(0.66) & \sin(0.66) & \cos(0.66) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{2.98} & \ln(2.98) & \sin(2.98) & \cos(2.98) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -0.27 \\ \vdots \\ 1.03 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom. Uporabimo vgrajeno funkcijo \, ki vrne rešitev

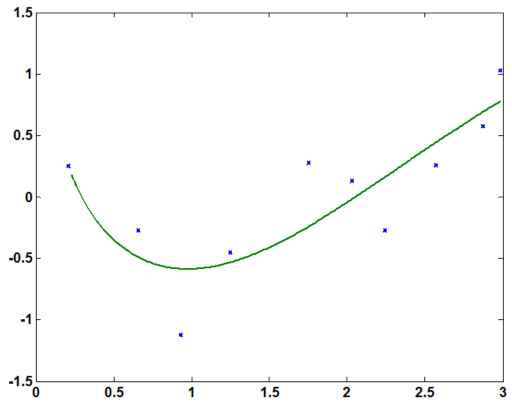
$$\begin{aligned} a &= 0.0353, \\ b &= -0.7580, \\ c &= -0.1938, \\ d &= -0.9556. \end{aligned}$$

Na sliki 8.4 so narisane dane točke in funkcija $y(x)$, ki se jim najbolje prilega.

9. Rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

v smislu najmanjših kvadratov.



Slika 8.4: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

Rešitev. Uporabimo normalni sistem,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 17 \\ -11 & 28 & -16 \\ 17 & -16 & 22 \end{bmatrix} = B, \; A^T b = \begin{bmatrix} -22 \\ 0 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem in dobimo

$$x_1 = -\frac{18}{7}, \; x_2 = -\frac{151}{210}, \; x_3 = \frac{107}{210}.$$

10. Rešite sistem

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3, \\ 3x + 2y &= 5, \\ x + y &= 2.09, \end{aligned}$$

v smislu najmanjših kvadratov.

Rešitev. Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2.09 \end{bmatrix}.$$

Opazimo, da rešujemo predoločen sistem, ki ga bomo rešili preko normalnega sistema,

$$\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.09 \\ 18.09 \end{bmatrix}.$$

Rešimo sistem

$$\begin{aligned} 11x + 9y &= 20.09, \\ 9x + 9y &= 18.09, \end{aligned}$$

in dobimo $x = 1,\ y = 1.01$.

11. Rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

v smislu najmanjših kvadratov.

Rešitev. Predoločen sistem rešimo preko normalnega sistema,

$$\begin{bmatrix} 69 & 39 \\ 39 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je $x = \frac{29}{35},\ y = -\frac{92}{105}$.

12. Izračunajte QR razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & 2 & r_{12} & = & 2 & r_{13} & = & 3 \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} & r_{23} & = & 5 \\
 & & & r_{22} & = & 4 & q_3 & = & \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} & r_{33} & = & 6 \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.
$$

13. Izračunajte QR razcep matrike

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

Rešitev.

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & \sqrt{5} & r_{12} & = & \frac{2}{\sqrt{5}} & r_{13} & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -1 \end{bmatrix} & r_{23} & = & 11\sqrt{\frac{2}{15}} \\
 & & & r_{22} & = & \sqrt{\frac{6}{5}} & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{16}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \sqrt{\frac{2}{15}} \\ -\sqrt{\frac{5}{6}} \end{bmatrix} & r_{33} & = & 8\sqrt{\frac{2}{3}} \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{2}{15}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{5}{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \sqrt{\frac{6}{5}} & 11\sqrt{\frac{2}{15}} \\ 0 & 0 & 8\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}.
$$

14. Z uporabo QR razcepa poiščite rešitev sistema

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

po metodi najmanjših kvadratov.

Rešitev. Najprej izračunamo QR razcep,

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{11} &= \sqrt{15} \\
q_1 &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
r_{12} &= -\frac{11}{\sqrt{15}} \\
q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{7}{15} \\ -\frac{64}{15} \\ -\frac{6}{5} \\ -\frac{4}{15} \end{bmatrix} \\
r_{22} &= \sqrt{\frac{299}{15}} \\
q_2 &= \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{4485}} \\ -\frac{64}{\sqrt{4485}} \\ -6\sqrt{\frac{3}{1495}} \\ -\frac{4}{\sqrt{4485}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{13} &= \frac{17}{\sqrt{15}} \\
r_{23} &= -\frac{53}{\sqrt{4485}} \\
q_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{354}{299} \\ \frac{33}{299} \\ -\frac{243}{299} \\ -\frac{54}{299} \end{bmatrix} \\
r_{33} &= 3\sqrt{\frac{70}{299}} \\
q_3 &= \begin{bmatrix} -59\sqrt{\frac{2}{10465}} \\ \frac{11}{\sqrt{20930}} \\ -\frac{81}{\sqrt{20930}} \\ -9\sqrt{\frac{2}{10465}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{7}{\sqrt{4485}} & -59\sqrt{\frac{2}{10465}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{64}{\sqrt{4485}} & \frac{11}{\sqrt{20930}} \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & -6\sqrt{\frac{3}{1495}} & -\frac{81}{\sqrt{20930}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{4}{\sqrt{4485}} & -9\sqrt{\frac{2}{10465}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{15} & -\frac{11}{\sqrt{15}} & \frac{17}{\sqrt{15}} \\ 0 & \sqrt{\frac{299}{15}} & -\frac{53}{\sqrt{4485}} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{70}{299}} \end{bmatrix}.
$$

Zdaj rešimo sistem $Rx = Q^T b$,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{15} & -\frac{11}{\sqrt{15}} & \frac{17}{\sqrt{15}} \\ 0 & \sqrt{\frac{299}{15}} & -\frac{53}{\sqrt{4485}} \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{70}{299}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{7}{\sqrt{4485}} & -59\sqrt{\frac{2}{10465}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{64}{\sqrt{4485}} & \frac{11}{\sqrt{20930}} \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} & -6\sqrt{\frac{3}{1495}} & -\frac{81}{\sqrt{20930}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{4}{\sqrt{4485}} & -9\sqrt{\frac{2}{10465}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{22}{\sqrt{15}} \\ -\frac{242}{\sqrt{4485}} \\ \frac{107}{\sqrt{20930}} \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema je $x = [-\frac{18}{7}, -\frac{151}{210}, \frac{107}{210}]^T$.

15. Izračunajte QR razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} -51 \\ 167 \\ 24 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 4 \\ -68 \\ -41 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & 14 & r_{12} & = & 21 & r_{13} & = & -14 \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{bmatrix} & r_{23} & = & -70 \\
 & & & r_{22} & = & 175 & q_3 & = & \begin{bmatrix} -\frac{58}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -33 \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} -\frac{69}{175} \\ \frac{158}{175} \\ \frac{6}{35} \end{bmatrix} & r_{33} & = & 35 \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} -\frac{58}{175} \\ \frac{6}{175} \\ -\frac{33}{35} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & -\frac{58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{158}{175} & \frac{6}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{35} & -\frac{33}{35} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

16. Izračunajte QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{array}{lcl|lcl|lcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & 3 & r_{12} & = & 4 & r_{13} & = & 2 \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} & r_{23} & = & -1 \\
 & & & r_{22} & = & 2 & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} & r_{33} & = & 4 \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

17. Rešite sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

s pomočjo QR razcepa.

Rešitev.

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & \sqrt{2} & r_{12} & = & 0 & r_{13} & = & -2\sqrt{2} \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} & r_{23} & = & 0 \\
 & & & r_{22} & = & \sqrt{2} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} & r_{33} & = & 2 \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Zdaj rešimo sistem $Rx = Q^T b$,

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.
$$

Rešitev je $x = [\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]^T$.

18. Izračunajte QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & 1 & r_{12} & = & 1 & r_{13} & = & 2 \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & r_{23} & = & 1 \\
 & & & r_{22} & = & 1 & q_3 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & r_{33} & = & 3 \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

19. Izračunajte QR razcep matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix}-1\\4\\4\\-1\end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix}4\\-2\\2\\0\end{bmatrix}\\
r_{11} & = & 2 & r_{12} & = & 3 & r_{13} & = & 2\\
q_1 & = & \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\end{bmatrix} & r_{23} & = & -2\\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{bmatrix}\\
 & & & r_{22} & = & 5 & & & \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} & r_{33} & = & 4\\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rezultat sta matriki

$$Q = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\0 & 5 & -2\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

20. Izračunajte QR razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

in rešite sistem

$$Ax = [-3, 1, 5]^T.$$

Rešitev.

$$
\begin{array}{rcl|rcl|rcl}
q_1 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} & q_3 & = & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r_{11} & = & \sqrt{2} & r_{12} & = & -\sqrt{2} & r_{13} & = & \sqrt{2} \\
q_1 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} & r_{23} & = & -1 \\
 & & & r_{22} & = & 2 & q_3 & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & q_2 & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & r_{33} & = & \sqrt{2} \\
 & & & & & & q_3 & = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Rezultat sta matriki

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.
$$

Rešimo sistem $Ax = [-3, 1, 5]^T$ preko QR razcepa. Rešujemo

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ -5 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}.
$$

Rešitev sistema je $x = [-4, -3, -1]^T$.

21. Število izdelkov, ki jih podjetje proda na nekem območju, je odvisno od števila prebivalcev na tem območju in povprečnega dohodka prebivalca območja. V tabeli je zapisana prodaja podjetja na petih območjih, število tamkajšnjih prebivalcev in povprečen dohodek.

območje	prodaja	število preb.	dohodek
1	162	274	2450
2	120	180	3254
3	223	375	3802
4	131	205	2838
5	67	86	2347

Podjetje želi podatke uporabiti za napoved prodaje in predvideva, da je odvisnost oblike

$$\text{prodaja } = \alpha_0 + \alpha_1 \times \text{ število prebivalcev } + \alpha_2 \times \text{ dohodek.}$$

Zapišite problem v obliki predoločenega sistema in določite konstante $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

Rešitev. Najprej zapišimo sistem v običajni obliki

$$\begin{aligned}
162 &= \alpha_0 + 274\ \alpha_1 + 2450\ \alpha_2, \\
120 &= \alpha_0 + 180\ \alpha_1 + 3254\ \alpha_2, \\
223 &= \alpha_0 + 375\ \alpha_1 + 3802\ \alpha_2, \\
131 &= \alpha_0 + 205\ \alpha_1 + 2838\ \alpha_2, \\
67 &= \alpha_0 + 86\ \alpha_1 + 2347\ \alpha_2
\end{aligned}$$

in ga pretvorimo v matrično obliko,

$$\begin{bmatrix} 1 & 274 & 2450 \\ 1 & 180 & 3254 \\ 1 & 375 & 3802 \\ 1 & 205 & 2838 \\ 1 & 86 & 2347 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 162 \\ 120 \\ 223 \\ 131 \\ 67 \end{bmatrix}.$$

Rešimo predoločen sistem preko normalnega sistema $A^T A = A^T b$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1120 & 14691 \\ 1120 & 297522 & 3466402 \\ 14691 & 3466402 & 44608873 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 703 \\ 182230 \\ 2164253 \end{bmatrix},$$

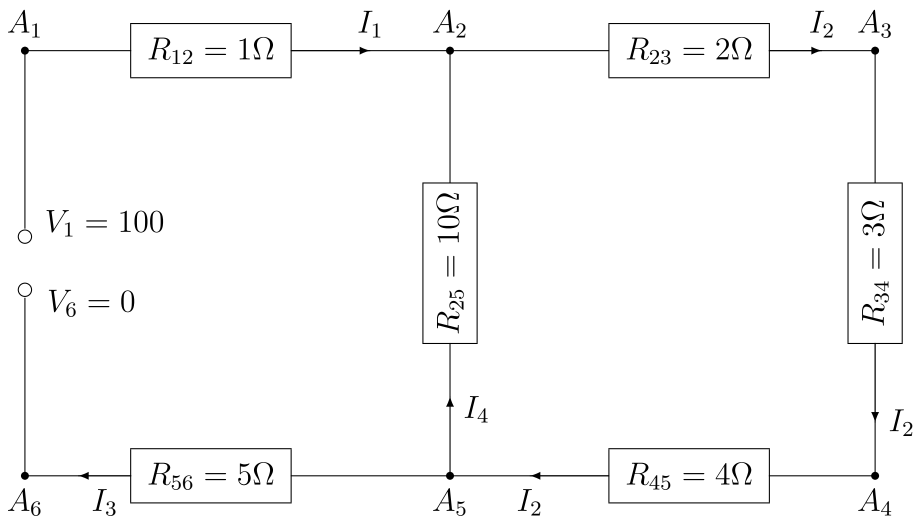
ki ga rešimo z razcepom Choleskega in dobimo rešitev

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 7.0325, \\
\alpha_1 &= 0.5044, \\
\alpha_2 &= 0.0070.
\end{aligned}$$

22. Radi bi izračunali tok v vozliščih A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 in A_6 električnega vezja na sliki 8.5. Zapišite problem v obliki linearnega sistema in izračunajte rešitev.

Rešitev. Kirchoffov zakon o tokovih pravi, da je vsota tokov v vozlišču enaka 0. Če ta zakon uporabimo v vozliščih, dobimo

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 + I_4 &= 0 \text{ v vozlišču } A_2, \\
I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \text{ v vozlišču } A_5, \\
I_2 - I_2 &= 0 \text{ v vozlišču } A_3, \\
I_2 - I_2 &= 0 \text{ v vozlišču } A_4.
\end{aligned}$$



Slika 8.5: Shema električnega vezja.

Zdaj pogledamo še padec napetosti v vsaki zanki tokokroga, $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$, $A_1A_2A_5A_6A_1$ in $A_2A_3A_4A_5A_2$. Kirchoffov zakon o napetosti pravi, da je skupna sprememba napetosti v vsaki sklenjeni zanki enaka 0. Iz zanke $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$ dobimo

$$I_1 + 9I_2 + 5I_3 = 100, \tag{8.3}$$

kjer smo pri koeficientih upoštevali upornosti. Enačbi, ki ju dobimo iz ostalih dveh zank, pa sta

$$\begin{aligned} I_1 - 10I_4 + 5I_3 &= 100, \\ 9I_2 + 10I_4 &= 0. \end{aligned}$$

Opazimo, da se ti dve enačbi seštejeta v enačbo (8.3). Torej imamo štiri enačbe za štiri neznanke:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_4 &= 0, \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0, \\ I_1 - 10I_4 + 5I_3 &= 100, \\ 9I_2 + 10I_4 &= 0. \end{aligned}$$

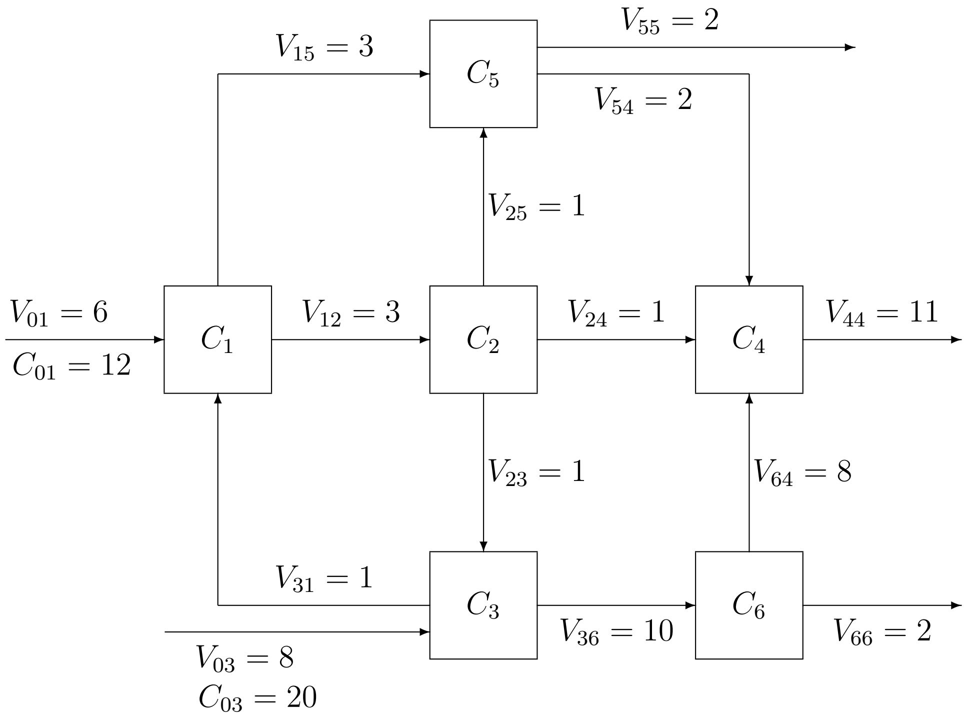
Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 9 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo rešitev

$$\begin{aligned}
I_1 &= 9.31, \\
I_2 &= 4.90, \\
I_3 &= 9.31, \\
I_4 &= -4.41.
\end{aligned}$$

23. Rešujemo problem za kemično tovarno, v kateri je šest kemičnih reaktorjev z različnimi masnimi tokovi mešanice v in iz reaktorja. Shema tovarne je na sliki 8.6. Tovarno zanima koncentracija mešanice v različnih reaktorjih. Zapišite problem v obliki linearnega sistema in ga rešite.



Slika 8.6: Shema kemične tovarne.

Opomba. Uporabimo oznake

$$\begin{aligned}
m_i = &\text{ masni tok komponente skozi reaktor } i \text{ v mg/min},\\
V_{ij} = &\text{ volumski tok iz reaktorja } i \text{ v reaktor } j, \text{ v m}^3\text{/min},\\
C_i = &\text{ koncentracija v reaktorju } i \text{ v mg/m}^3,\\
&(i, j = 1, 2, \ldots, 6.)
\end{aligned}$$

Rešitev. Uporabili bomo zakon o ohranitvi mase in zvezo

$$m_i = V_i \cdot C_i.$$

Oglejmo si prvi reaktor. V reaktor priteče

$$m_\mathrm{n} = V_{01}C_{01} + V_{31}C_3 = 72 + C_3,$$

iz njega pa odteče

$$m_\mathrm{v} = V_{15}C_1 + V_{12}C_1 = 6C_1,$$

torej velja

$$6C_1 = 72 + C_3.$$

S slike razberemo tudi ostale zveze:

$$\begin{aligned}
6C_1 - C_3 &= 72 \text{ za reaktor 1},\\
3C_1 - 3C_2 &= 0 \text{ za reaktor 2},\\
-C_2 + 11C_3 &= 160 \text{ za reaktor 3},\\
C_2 - 11C_4 + 2C_5 + 8C_6 &= 0 \text{ za reaktor 4},\\
3C_1 + C_2 - 4C_5 &= 0 \text{ za reaktor 5},\\
10C_3 - 10C_6 &= 0 \text{ za reaktor 6}.
\end{aligned}$$

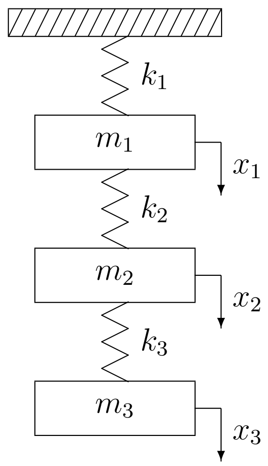
Zapišimo sistem v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev, ki jo dobimo z Octaveom, je

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 14.65, \\
C_2 &= 14.65, \\
C_3 &= 15.88, \\
C_4 &= 15.54, \\
C_5 &= 14.65, \\
C_6 &= 15.88.
\end{aligned}
$$

24. Na sliki 8.7 je sistem treh uteži, ki so obešene na vzmeteh. S k_1, k_2 in k_3 smo označili koeficiente vzmeti. Iščemo njihove raztezke v ravnovesni legi, x_1, x_2 in x_3. Zapišite problem v obliki linearnega sistema.



Slika 8.7: Sistem treh uteži.

Rešitev. Uporabili bomo Hookov zakon $F = k \cdot x$ in drugi Newtonov zakon $\sum F = m \cdot a$. Za vsako utež napišemo enačbo drugega Newtonovega zakona:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) + m_1 g - k_1 x_1, \\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k_3(x_3 - x_2) + m_2 g - k_2(x_2 - x_1), \\
m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= m_3 g - k_3(x_3 - x_2).
\end{aligned}
$$

Ker nas zanima ravnovesna lega, so drugi odvodi enaki 0, in se zgornji sistem poenostavi v

$$\begin{aligned} k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= m_1g, \\ k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_3) &= m_2g, \\ k_3(x_3 - x_2) &= m_3g. \end{aligned}$$

Zapišimo sistem še v matrični obliki,

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1g \\ m_2g \\ m_3g \end{bmatrix}.$$

25. Problem toplotne prevodnosti je ugotoviti porazdelitev temperature $T(x, y, z, t)$ v snovi, ki je odvisna od robnih pogojev na površini snovi. Ko poznamo temperaturno porazdelitev, lahko enostavno izračunamo toplotni tok v vsaki točki. Toplotna enačba, po kateri se spreminja temperaturna porazdelitev v najenostavnejšem dvodimenzionalnem primeru, je Laplaceova enačba

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Pogosto so realni pogoji taki, da analitične rešitve ne znamo poiskati. V teh primerih uporabimo npr. *metodo končnih diferenc*.

Pri tej metodi zamenjamo odvode z njihovimi aproksimacijami, območje pa razdelimo na manjše kose. Označimo korak v x smeri z Δx, korak v y smeri pa z Δy. Vsako vozlišče ima indeksa i in j, ki označujeta, kje se točka nahaja. Temperaturno porazdelitev snovi predstavimo s temperaturo v vozliščih. Temperatura v vsakem vozlišču (x_i, y_j), ki ga bomo označevali kar z (i, j), je $T_{i,j}$. Shematično je delitev prikazana na sliki 8.8.

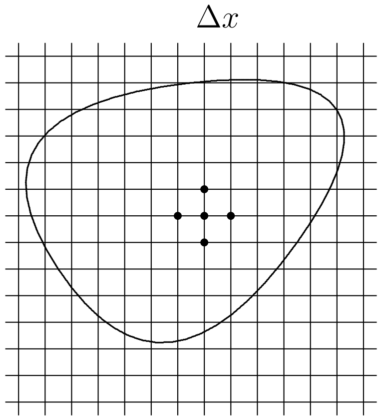
Rezultat, ki ga dobimo iz Laplaceove enačbe za notranja vozlišča, je

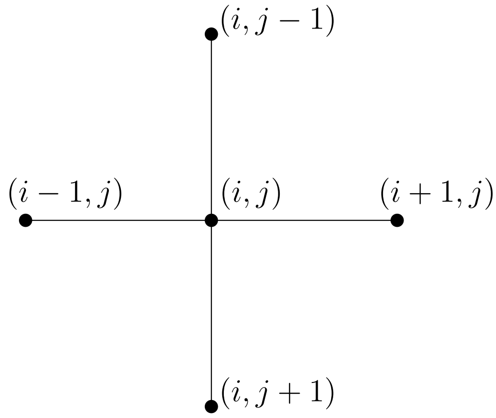
$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0.$$

Če predpostavimo še, da je $\Delta x = \Delta y$, za notranje vozle dobimo enačbo

$$4T_{i,j} - T_{i-1,j} - T_{i,j-1} - T_{i+1,j} - T_{i,j+1} = 0. \tag{8.4}$$

Naloga: Dana je dvodimenzionalna pravokotna plošča $(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$, ki ima zgornji rob na konstantni temperaturi $100°C$, vse

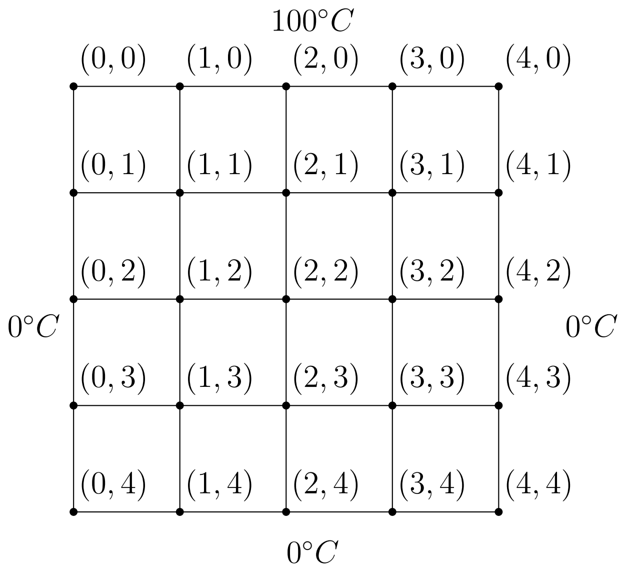




Slika 8.8: Delitev območja (levo) in pettočkovna shema (desno).

ostale robove pa na konstantni temperaturi $0°C$. Zanima nas temperatura v 9 notranjih točkah (x_i, y_i), kjer je $x_i = i\ \Delta x,\ y_j = j\ \Delta y,\ i, j = 1, 2, 3,\ \Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$. Zapišite problem v obliki linearnega sistema.

Rešitev. Na sliki 8.9 je skica delitve pravokotne plošče z robnimi pogoji.



Slika 8.9: Delitev pravokotnika z dopisanimi robnimi pogoji.

Problem je simetričen, torej je $T_{3,3} = T_{1,3},\ T_{3,2} = T_{1,2},\ T_{3,1} = T_{1,1}$. Ostane nam še šest neznank: $T_{1,1}, T_{1,2}, T_{1,3}, T_{2,1}, T_{2,2}, T_{2,3}$. Iz enačbe

(8.4) sledi:

$$
\begin{aligned}
4T_{1,1} - 0 - 100 - T_{2,1} - T_{1,2} &= 0, \\
4T_{2,1} - T_{1,1} - 100 - T_{1,1} - T_{2,2} &= 0, \\
4T_{1,2} - 0 - T_{1,1} - T_{2,2} - T_{1,3} &= 0, \\
4T_{2,2} - T_{1,2} - T_{2,1} - T_{1,2} - T_{2,3} &= 0, \\
4T_{1,3} - 0 - T_{1,2} - T_{2,3} - 0 &= 0, \\
4T_{2,3} - T_{1,3} - T_{2,2} - T_{1,3} - 0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Enačbe uredimo in dobimo sistem

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & -2 & 4 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{1,2} \\ T_{2,2} \\ T_{1,3} \\ T_{2,3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}.
$$

Rešitev sistema je

$$
\begin{aligned}
T_{1,1} &= 42.86, \\
T_{2,1} &= 52.68, \\
T_{1,2} &= 18.75, \\
T_{2,2} &= 25.00, \\
T_{1,3} &= 7.14, \\
T_{2,3} &= 9.82.
\end{aligned}
$$

26. Ogledali si bomo prevajanje toplote po žici v primeru, ko je temperatura ves čas konstantna. Enačba, ki opisuje spreminjanje temperature, je

$$
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x).
$$

Predpostavimo, da je domena problema $0 \leq x \leq 1$. Razdelimo jo na štiri kose enake dolžine $\Delta x = \frac{1}{4}$. Temperaturo T v točki $x = i\,\Delta x$ bomo označili s T_i. Poznamo temperaturo v krajiščih,

$$
T_0 = \alpha,\ T_4 = \beta.
$$

To sta robna pogoja problema. Uporabimo podobno shemo kot v prejšnji nalogi in tako dobimo temperaturo v poljubni točki po enačbi

$$
T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1} = (\Delta x)^2 f(x_i).
$$

Problem zapišite v obliki linearnega sistema.

Rešitev. Temperaturo v vozliščih izračunamo iz

$$\begin{aligned} T_0 &= \alpha \text{ v } x = 0 \text{ (podatek)}, \\ T_0 - 2T_1 + T_2 &= (\Delta x)^2 f(\Delta x) \text{ v } x = \Delta x, \\ T_1 - 2T_2 + T_3 &= (\Delta x)^2 f(2\Delta x) \text{ v } x = 2\Delta x, \\ T_2 - 2T_3 + T_4 &= (\Delta x)^2 f(3\Delta x) \text{ v } x = 3\Delta x, \\ T_4 &= \beta \text{ v } x = 1 \text{ (podatek)}. \end{aligned}$$

Sistem zapišimo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ (\Delta x)^2 f(\Delta x) \\ (\Delta x)^2 f(2\Delta x) \\ (\Delta x)^2 f(3\Delta x) \\ \beta \end{bmatrix}.$$

27. Zdaj poglejmo še prevajanje toplote, ko se temperatura T spreminja s časom t. Toplotna enačba v tem primeru je

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Ravnino (x, t) razdelimo na dele z razmikom Δx v x smeri in Δt v smeri t. Temperaturo v vozliščih $x_i = i\Delta x,\ t_j = j\Delta t$ označimo s T_{ij}. Odvoda $\frac{\partial T}{\partial t}$ in $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ aproksimiramo s končnimi diferencami,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &\approx \frac{1}{\Delta t}\big(T_{i,j+1} - T_{ij}\big), \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\big(T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}\big). \end{aligned}$$

Od tod sledi

$$(1 + 2C)T_{i,j+1} - C(T_{i+1,j+1} + T_{i-1,j+1}) = T_{i,j},$$
$$i = 1, 2, \ldots, n,\ C = \alpha\,\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Poznate temperaturi na robovih,

$$T_{0,t} = T_{W_1},\ T_{n+1,t} = T_{W_2}.$$

Zapišite problem določanja temperature v obliki linearnega sistema.

Rešitev. Ob časovnem koraku $j = k + 1$ lahko določimo temperaturo, če poznamo temperaturo ob prejšnjem koraku. Zapišimo enačbe, ki veljajo ob časovnem koraku $j = k$,

$$
\begin{aligned}
(1+2C)T_{1,k+1} - CT_{2,k+1} &= CT_{0,k+1} + T_{1,k},\\
(1+2C)T_{2,k+1} - CT_{3,k+1} - CT_{1,k+1} &= T_{2,k},\\
&\vdots\\
(1+2C)T_{n-1,k+1} - CT_{n,k+1} - CT_{n-2,k+1} &= T_{n-1,k},\\
(1+2C)T_{n,k+1} - CT_{n-1,k+1} &= T_{n,k} + CT_{n+1,k+1}.
\end{aligned}
$$

Uporabimo še robne pogoje in dobimo

$$
\begin{bmatrix}
1+2C & -C & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
-C & 1+2C & -C & 0 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & & -C & 1+2C & -C\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -C & 1+2C
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T_{1,k+1}\\ T_{2,k+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ T_{n-1,k+1}\\ T_{n,k+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
T_{1,k} + CT_{W_1}\\ T_{2,k}\\ \vdots\\ \vdots\\ T_{n-1,k}\\ T_{n,k} + CT_{W_2}
\end{bmatrix}.
$$

28. V spodnji tabeli je zapisano število prebivalcev ZDA v posameznem letu.

leto	število prebivalcev (v milijonih)
1815	8.3
1825	11
1835	14.7
1845	19.7
1855	26.7
1865	35.2
1875	44.4
1885	55.9
1895	68.9
1905	83.2
1915	98.8
1925	114.2
1935	127.1
1945	140.1
1955	164
1965	190.9
1975	214.3

Poiščite funkcijo oblike

$$f(x) = a\, e^{bx},$$

ki se najbolje prilega podatkom. Kakšno bo število prebivalcev leta 2100, če se demografski trend ne spremeni?

Rešitev. Funkcija ni linearna, zato bomo rešitev poiskali z Newtonovo metodo. Da jo lahko uporabimo, potrebujemo dober začetni približek, ki ga bomo dobili z linearizacijo. Obe strani enačbe logaritmiramo in dobimo

$$\begin{aligned} y &= a\, e^{bx} \\ \ln y &= \ln a + \ln e^{bx} \\ \ln y &= \ln a + bx. \end{aligned}$$

Zdaj rešujemo linearen problem

$$\tilde{y} = A + Bx,$$

kjer je $\tilde{y} = \ln y$, $A = \ln a$, $B = b$. Naj bo m število podatkov. Iz naloge 3 vidimo, da moramo rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \tilde{y}_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \tilde{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \ln y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i \ln y_i \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.21017 \\ 0.20107 \end{bmatrix},$$

torej je primeren začetni približek za Newtonovo metodo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.11725 \\ 0.20107 \end{bmatrix}.$$

Funkcijo F in odvod JF smo izpeljali v nalogi 5. Vstavimo ju v Newtonovo metodo (program `newton` ([1])) in dobimo rešitev

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.9507 \\ 0.155328 \end{bmatrix}.$$

Funkcija, ki se najbolje prilega podatkom je torej

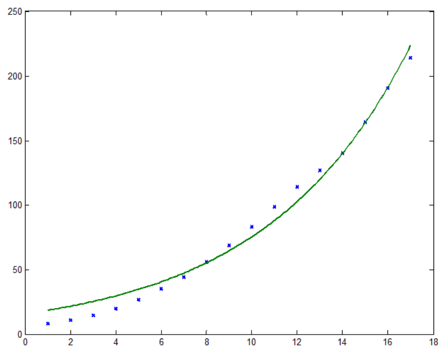
$$f(x) = 15.9507\, e^{0.155328\, x}.$$

Vstavimo $t = 2100$, torej je pričakovano število prebivalcev enako

$$f(2100) = 1558.8.$$

Na sliki 8.10 so narisani podatki in funkcija, ki se jim najbolje prilega po metodi najmanjših kvadratov.

Opomba: Pri reševanju je treba paziti, da ne pride do prekoračitve obsega.



Slika 8.10: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

29. Biologi so opazovali razmnoževanje bakterij in dobili naslednje rezultate:

čas t (min)	število bakterij N
10	149000
20	215000
30	335000
40	477000
50	769000

Predvidevajo, da je rast števila bakterij eksponentna. Poiščite konstanti N_0 in β, da se bo krivulja oblike

$$N = N_0 \, e^{\beta t}$$

najbolje prilegala podatkom.

Rešitev. Funkcija ni linearna, zato bomo rešitev poiskali z Newtonovo metodo. Da jo lahko uporabimo, potrebujemo dober začetni približek, ki ga bomo dobili z linearizacijo. Obe strani enačbe logaritmiramo in dobimo

$$\begin{aligned} N &= N_0 \, e^{\beta t} \\ \ln N &= \ln N_0 + \ln e^{\beta t} \\ \ln N &= \ln N_0 + \beta t. \end{aligned}$$

Zdaj rešujemo linearen problem

$$\widetilde{N} = n_0 + \beta t,$$

kjer je $\widetilde{N} = \ln N,\ N_0 = e^{n_0}$. Naj bo m število podatkov. Iz naloge 3 vemo, da moramo rešiti sistem

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i & \sum_{i=1}^m t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \widetilde{N}_i \\ \sum_{i=1}^m t_i \widetilde{N}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \ln N_i \\ \sum_{i=1}^m t_i \ln N_i \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.4843 \\ 0.04079 \end{bmatrix},$$

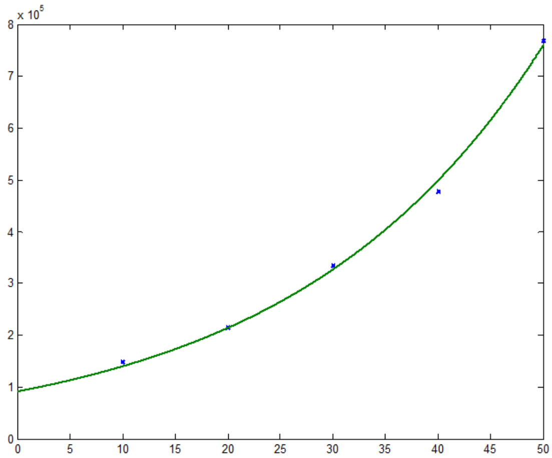
torej je primeren začetni približek za Newtonovo metodo

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{n_0} \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97175 \\ 0.04079 \end{bmatrix}.$$

Funkcijo F in odvod JF smo izpeljali v nalogi 5. Vstavimo ju v Newtonovo metodo in dobimo rešitev

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92074 \\ 0.04222 \end{bmatrix}.$$

Na sliki 8.11 so prikazani podatki in dobljena funkcija.



Slika 8.11: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

30. V Kumrovcu so posadili 12 češnjevih dreves. Vsa so bila stara eno leto in visoka 1.83m. V tabeli je zapisana njihova rast.

starost drevesa (v letih)	povprečna višina (v metrih)
1	1.83
2	2.90
3	3.96
4	4.57
5	5.03
6	5.33
7	5.64
8	5.79
9	5.94
10	6.00
11	6.04

(a) Poiščite konstanti a in b, da bo funkcija

$$y = a + b \ln x$$

najbolje aproksimirala podatke. Narišite tudi graf, na katerem so dane točke in dobljena funkcija.

(b) Kakšna je bila povprečna višina dreves, ko so bila stara leto in pol?

(c) Kakšna bo povprečna višina dreves, ko bodo stara 20 let?

Rešitev.

(a) Rešujemo predoločen sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & \ln 1 \\ 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \\ 1 & \ln 4 \\ 1 & \ln 5 \\ 1 & \ln 6 \\ 1 & \ln 7 \\ 1 & \ln 8 \\ 1 & \ln 9 \\ 1 & \ln 10 \\ 1 & \ln 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.83 \\ 2.90 \\ 3.96 \\ 4.57 \\ 5.03 \\ 5.33 \\ 5.64 \\ 5.79 \\ 5.94 \\ 6.00 \\ 6.04 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Octaveom in dobimo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8605 \\ 1.8606 \end{bmatrix}.$$

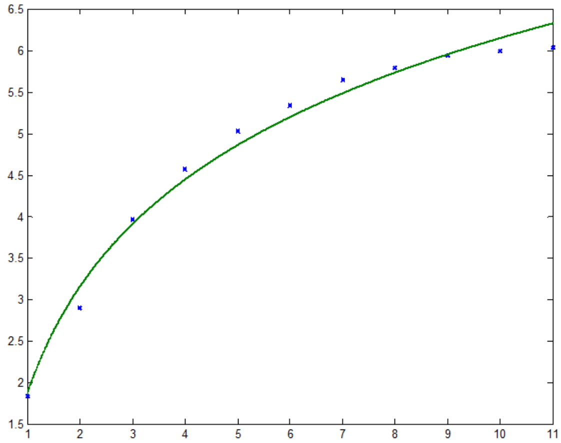
Funkcija oblike $y = a + b \ln x$, ki najbolje aproksimira dane podatke, je

$$y(x) = 1.8605 + 1.8606 \; \ln x.$$

Njen graf skupaj s podatki je narisan na sliki 8.12.

(b) V funkcijo iz prejšnje točke vstavimo $x = 1.5$. Povprečna leto in pol stara češnja je visoka 2.61m.

(c) V funkcijo vstavimo $x = 20$ in dobimo 7.43m. Torej bodo po dvajsetih letih češnje povprečno visoke 7.43m.



Slika 8.12: Dane točke in funkcija, ki se jim najbolje prilega.

31. Poiščite Givensovo rotacijo, ki vektor $x = [1, \frac{1}{2}]^T$ zavrti v vektor oblike $y = [\alpha, 0]^T$ in izračunajte konstanto α.

    Rešitev. Givensova rotacija je oblike

$$G = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix},$$

kjer velja

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ c &= \frac{1}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ s &= \frac{\frac{1}{2}}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Preverimo rezultat:

$$Gx = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

torej je $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

32. Z uporabo Givensovih rotacij zavrtite vektor $x = [1, -1, 2]^T$ v vektor oblike $y = [\alpha, 0, 0]^T$.

Rešitev. Najprej uničimo srednjo komponento vektorja x s pomočjo prve. Izračunamo

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ s &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

torej je Givensova rotacija

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zavrteni vektor x pa je $\tilde{x} = G_1 x = [\sqrt{2}, 0, 2]^T$. Uničimo še zadnjo komponento vektorja $\tilde{x}$ s pomočjo prve. Najprej izračunamo

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \\ c &= \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ s &= \frac{2}{\sqrt{6}}, \end{aligned}$$

torej je Givensova rotacija

$$G_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Zarotiramo še vektor $\tilde{x}$ in dobimo $y = G_2 \tilde{x} = [\sqrt{6}, 0, 0]^T$.

33. Dana je matrika

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Z uporabo Givensovih rotacij jo preoblikujte v zgornje trikotno obliko in zapišite njen QR razcep.

Rešitev. Želimo "uničiti" neničelna elementa na mestih (2,1) in (3,2). Najprej izberimo element na mestu (2,1) in konstruirajmo Givensovo rotacijo, ki bo oblike

$$G_1 = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo c in s,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} = 7.810, \\ c &= \frac{6}{r} = 0.768, \\ s &= \frac{5}{r} = 0.640. \end{aligned}$$

Nova matrika je

$$R_1 = G_1 A = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & -2.4327 & 3.0729 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zdaj želimo"uničiti" element na mestu (3,2) v matriki R_1, torej bo Givensova rotacija oblike

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix},$$

kjer je

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-2.4327)^2 + 4^2} = 4.6817, \\ c &= \frac{-2.4327}{r} = -0.5196, \\ s &= \frac{4}{r} = 0.8544. \end{aligned}$$

Uporabimo jo na matriki in dobimo

$$\begin{aligned} R = G_2 R_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & -2.4327 & 3.0729 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7.8102 & 4.4813 & 2.5607 \\ 0 & 4.6817 & 0.9664 \\ 0 & 0 & -4.1843 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrika Q je enaka

$$Q = G_1^T G_2^T = \begin{bmatrix} 0.7682 & 0.3327 & 0.5470 \\ 0.6402 & -0.3992 & -0.6564 \\ 0 & 0.8544 & -0.5196 \end{bmatrix}.$$

34. Dana sta vektorja $x = [1, -1, 2]^T$ in $y = [-1, 2, 1]^T$. Poiščite Householderjevo zrcaljenje, ki preslika x v y.

Rešitev. Če vektorja nista enako dolga, naloga nima rešitve, zato najprej izračunajmo njuni dolžini,

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \\ \|y\|_2 &= \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Torej naloga ima rešitev. Iščemo tako Householderjevo zrcaljenje

$$P = I - \frac{2}{w^T w}\, ww^T,$$

da bo $Px = y$. Torej

$$\left(I - \frac{2}{w^T w}\, ww^T\right) x = y.$$

Predpostavimo, da je $\|w\|_2 = 1$, in dobimo

$$\begin{aligned} x - 2ww^T x &= y, \\ -2w(w^T x) &= y - x, \ \alpha := w^T x, \\ -2\alpha w &= y - x, \\ 2\alpha w &= x - y. \end{aligned}$$

Zanima nas le smer vektorja w, veljati pa mora še $\|w\|_2 = 1$, zato vzamemo

$$w = \frac{x - y}{\|x - y\|_2}.$$

Zdaj vstavimo dana vektorja,

$$\begin{aligned} w = \frac{[1, -1, 2]^T - [-1, 2, 1]^T}{\|[2, -3, 1]^T\|_2} &= \frac{1}{\sqrt{4+9+1}}\, [2, -3, 1]^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\, [2, -3, 1]^T. \end{aligned}$$

Iskano Householderjevo zrcaljenje je torej

$$\begin{aligned} P = I - 2ww^T &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - 2\,\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} [2, -3, 1] \\ &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & 7 \end{bmatrix} - \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

35. S pomočjo Householderjevih zrcaljenj in QR razcepa rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 6y - 2z &= -7, \\ 2x + y - 2z &= -1, \\ 2x + 2y + 6z &= 6. \end{aligned}$$

Nasvet: Zrcaljenja delajte na razširjeni matriki $[A\ b]$.

Rešitev. Razširjena matrika je enaka

$$[A\ b] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & \mid & -7 \\ 2 & 1 & -2 & \mid & -1 \\ 2 & 2 & 6 & \mid & 6 \end{bmatrix}.$$

Prvo Householderjevo zrcaljenje dobimo iz prvega stolpca matrike $\widetilde{w}_1 = [\widetilde{w}_{11}, \widetilde{w}_{12}, \widetilde{w}_{13}]^T = [1, 2, 2]^T$, torej

$$\begin{aligned} \|\widetilde{w}_1\|_2 &= \sqrt{1+4+4} = 3, \\ w_1 &= \begin{bmatrix} \widetilde{w}_{11} \pm \|\widetilde{w}_1\|_2 \\ \widetilde{w}_{12} \\ \widetilde{w}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ P_1 &= I - \frac{2}{w_1^T w_1}\ w_1 w_1^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{16+4+4} \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uporabimo zrcaljenje na matriki $[A\ b]$,

$$\begin{aligned} P_1[A\ b] &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & \mid & -7 \\ 2 & 1 & -2 & \mid & -1 \\ 2 & 2 & 6 & \mid & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & \mid & -1 \\ 0 & -4 & -2 & \mid & 2 \\ 0 & -3 & 6 & \mid & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zdaj sestavimo naslednje Householderjevo zrcaljenje iz drugega stolpca nove matrike, $\widetilde{w}_2 = [\widetilde{w}_{21}, \widetilde{w}_{22}]^T = [-4, -3]^T$,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{w}_2\|_2 &= \sqrt{16+9} = 5,\\
w_2 &= \begin{bmatrix} \widetilde{w}_{21} \pm \|\widetilde{w}_2\|_2 \\ \widetilde{w}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -3 \end{bmatrix},\\
\widetilde{P}_2 &= I - \frac{2}{w_2^T w_2}\, w_2 w_2^T = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{81+9} \begin{bmatrix} 81 & 27 \\ 27 & 9 \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Torej je drugo Householderjevo zrcaljenje

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \widetilde{P}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -4 & -3 \\ & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo ga na spremenjeni matriki,

$$\begin{aligned}
P_2 \cdot P_1 [A\ b] &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & & \\ & -4 & -3 \\ & -3 & 4 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right]\\
&= \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right],
\end{aligned}$$

torej je

$$R = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ Q^T b = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Za rešitev sistema matrike $Q = P_1 P_2$ ne potrebujemo, saj sistem rešujemo z $Rx = Q^T b$, torej

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je

$$\begin{aligned}
z &= 1,\\
5y - 2z = -7 &\Rightarrow y = -1,\\
-3x - 4y - 2z = -1 &\Rightarrow x = 1.
\end{aligned}$$

36. Izračunajte singularni razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo $A^T A$,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

in njene lastne vrednosti

$$\begin{aligned} \det(A^T A - \lambda I) &= 0, \\ \left| \begin{matrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{matrix} \right] &= 0, \\ (10-\lambda)\left((10-\lambda)(2-\lambda) - 16\right) + 2(0 - 2(10-\lambda)) &= 0, \\ (10-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda) &= 0, \\ (10-\lambda)\lambda(\lambda - 12) &= 0, \\ \lambda_1 = 12,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pazimo, da so lastne vrednosti urejene po velikosti ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$). Torej je matrika Σ enaka

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor v_1, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_1 = 12$, zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix} v_1 = 0.$$

Izberemo $v_1 = [1, 2, 1]^T$ in ga normiramo

$$v_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T.$$

Lastni vektor v_2, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_2 = 10$, izračunamo iz

$$\begin{aligned} (A^T A - \lambda_2 I) v_2 &= 0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{bmatrix} v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Izberemo $v_2 = [2, -1, 0]^T$ in ga normiramo

$$v_2 = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right]^T.$$

Lastni vektor v_3, ki pripada lastni vrednosti $\lambda_3 = 0$, zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} v_3 = 0.$$

Izberemo $v_3 = [1, 2, -5]^T$ in ga normiramo

$$v_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right]^T.$$

Lastne vektorje zložimo v matriko V,

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo stolpce matrike U iz

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \\ u_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} \\ -\frac{5}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Torej je matrika U enaka

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Singularni razcep matrike A je

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}^T.$$

37. Izračunajte singularni razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Rešitev. Izračunajmo A^TA,

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti so rešitve enačbe

$$\begin{aligned} \det(A^TA - \lambda I) &= 0, \\ \begin{vmatrix} 25-\lambda & -15 \\ -15 & 25-\lambda \end{vmatrix} &= 0, \\ (25-\lambda)^2 - 15^2 &= 0, \\ \lambda^2 - 50\lambda + 400 &= 0, \\ \lambda_1 = 40, \lambda_2 &= 10. \end{aligned}$$

Torej je matrika Σ enaka

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo lastne vektorje matrike A^TA, iz

$$
\begin{aligned}
(A^TA - \lambda_1 I)v_1 &= 0,\\
\begin{bmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{bmatrix} v_1 &= 0,\\
v_1 &= [1, -1]^T, \text{ normiramo},\\
v_1 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T \quad \text{in}\\
(A^TA - \lambda_2 I)v_2 &= 0,\\
\begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} v_2 &= 0,\\
v_2 &= [1, 1]^T, \text{ normiramo},\\
v_2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T.
\end{aligned}
$$

Lastna vektorja zložimo v matriko V, torej

$$
V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.
$$

Zdaj izračunamo stolpce matrike U iz

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},\\
u_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Matrika U je torej

$$
U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.
$$

Singularni razcep matrike A je enak

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T.$$

Poglavje 9

Numerično računanje lastnih vrednosti

9.1 Definicija in lastnosti lastnih vrednosti

Dana je kvadratna kompleksna matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Neničeln vektor x je *lastni vektor* matrike A, če obstaja število λ, tako da velja

$$Ax = \lambda x.$$

Takemu številu λ rečemo *lastna vrednost* matrike A, ki pripada lastnemu vektorju x. Paru (λ, x) pravimo *lastni par.*
Če je x lastni vektor, je lastni vektor tudi vsak vektor oblike $c\,x$, $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Lastnemu vektorju, ki pripada lastni vrednosti z največjo absolutno vrednostjo, pravimo *dominantni lastni vektor.*
Lastne vrednosti matrike A so natanko rešitve λ *karakteristične enačbe*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Leva stran te enačbe je polinom stopnje n spremenljivke λ, katerega koeficienti so odvisni od A. Pravimo mu *karakteristični polinom.* Torej ima matrika A največ n lastnih vrednosti, ki niso nujno vse med seboj različne.
Če je matrika A hermitska ($A = A^H$), potem so vse njene lastne vrednosti realne.
Ko so sistemi velikih dimenzij, postane praktično nemogoče rešiti karakteristično enačbo. Takrat lastne pare iščemo na bolj učinkovite načine.

9.2 Potenčna metoda in Hotelingova redukcija

Dana sta začetni približek x_0 za lastni vektor in matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ki ima dominantno lastno vrednost λ_1. Torej za njene lastne vrednosti velja

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Algoritem:

$i = 0, 1, \ldots$
    $x'_{i+1} = Ax_i$
    $x_{i+1} = \frac{1}{\|x'_{i+1}\|} x'_{i+1}$
    Če je razlika med x_{i+1} in x_i dovolj majhna, končaj zanko.

Vektorji x_i po smeri konvergirajo proti lastnemu vektorju, ki pripada lastni vrednosti λ_1. Zadnji približek x je približek za lastni vektor, ki pripada dominantni lastni vrednosti. Aproksimacija za dominantno lastno vrednost λ_1 je Rayleighov kvocient

$$\rho(x) = x^T Ax.$$

Algoritem ne konvergira nujno, če je $|\lambda_1| = |\lambda_2|$.
Če je matrika A simetrična, ima realne lastne vrednosti, lastni vektorji pa so ortogonalni (so med seboj pravokotni in so po normi enaki 1). Za izračun preostalih lastnih vrednosti lahko sedaj uporabimo Hotelingovo redukcijo

$$B = A - \lambda_1 x_1 x_1^T,$$

kjer je (λ_1, x_1) dominantni lastni par matrike A. Matrika B ima enake lastne vektorje kot A. Tudi vse lastne vrednosti so enake, razen lastne vrednosti λ_1 matrike A, ki s Hotelingovo transformacijo postane 0. Potenčno metodo lahko uporabimo na B in tako dobimo λ_2. Nato postopek ponavljamo.

9.3 Inverzna potenčna metoda

Inverzno potenčno metodo uporabljamo za iskanje lastnih vrednosti (in pripadajočih lastnih vektorjev) matrike A, ki so blizu danemu številu σ. Inverzna potenčna metoda za dano število σ, ki je približek za lastno vrednost matrike, uporabi standardno potenčno metodo na matriki $(A - \sigma I)^{-1}$. Rezultat konvergira proti lastnemu vektorju, ki pripada lastni vrednosti matrike A, ki je najbližje σ. Znotraj metode ne računamo inverza matrike, ampak na vsakem koraku rešimo linearni sistem

$$(A - \sigma I)x'_{i+1} = x_i.$$

9.4 Šturmovo zaporedje in bisekcija

S pomočjo Šturmovega zaporedja preštejemo število lastnih vrednosti, ki so večje od nekega danega števila. Nato lahko s pomočjo bisekcije izračunamo približek za lastno vrednost.
Dana je simetrična tridiagonalna matrika A z diagonalo $a_1, a_2, \dots, a_n$ in poddiagonalo $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. Za dano število λ definiramo Šturmovo zaporedje z $f_k = \det(A(1:k, 1:k) - \lambda I)$. Zaporedje lahko učinkovito izračunamo z rekurzivno formulo

$$\begin{aligned} f_0 &= 1, \\ f_1 &= a_1 - \lambda, \\ f_k &= (a_k - \lambda) f_{k-1} - b_{k-1}^2 f_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \tag{9.1}$$

V zaporedju pogledamo predznake števil f_k in preštejemo, kolikokrat se zaporedna predznaka ujemata. Pri tem je npr. v $+, +, -, +$ eno ujemanje, v $+, +, -, -$ sta 2 ujemanji, v $+, +, 0, -, +$ sta 2 ujemanji (0 štejemo le enkrat kot ujemanje s $+$ ali z $-$). Če je 0 na koncu zaporedja, je ne štejemo za ujemanje.
Število ujemanj predznakov v Šturmovem zaporedju za dani λ je enako številu lastnih vrednosti matrike A, ki so večje od λ.

9.5 Naloge

1. Ali je $x = [1, -2]^T$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 0$, za $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$?

   Rešitev. Preverimo direktno po definiciji

   $$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, \\ \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 6-6 \\ -2+2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Enačba je pravilna in x je lastni vektor.

2. Dana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ali je vektor $x = [3, -3]^T$ lastni vektor matrike A za lastno vrednost 1? Ali je vektor $y = [0, 1]^T$ lastni vektor?

S pomočjo karakterističnega polinoma izračunajte vse lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

Rešitev. Preverimo, ali velja $Ax = \lambda x$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Torej je x res lastni vektor matrike A za lastno vrednost 1.

Preverimo še za vektor y :

$$Ay = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Torej y ni lastni vektor matrike A.

Zapišimo karakteristično enačbo

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0,$$

od koder dobimo kvadratno enačbo

$$(2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

z rešitvama

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3.$$

Lastni vrednosti matrike A sta 1 in 3.

Najprej izračunajmo lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$. Veljati mora

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kar je ekvivalentno enačbi $x = -y$. Zato so lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti 1, oblike $[-s, s]^T$, $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Poiščimo še lastne vektorje, ki pripadajo lastni vrednosti $\lambda_2 = 3$. Veljati mora

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kar je ekvivalentno enačbi $x = y$. Vsi lastni vektorji, ki pripadajo lastni vrednosti 3, so oblike $[s, s]^T$, $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

3. Za dane matrike določite lastne vrednosti in lastne vektorje. Približek za dominantni lastni par izračunajte tudi v Octaveu s potenčno metodo in primerjajte rezultata.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$,

   (b) $B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

   (c) $C = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$,

   (d) $D = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

   (e) $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

   (f) $F = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$,

   (g) $G = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$,

   (h) $H = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$,

   (i) $J = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

   (j) $K = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   Rešitev.

   (a) Izračunamo karakteristični polinom

   $$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(8 - \lambda) - 0 = (\lambda - 8)(\lambda - 1)$$

   in njegovi ničli $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 1$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

   $$\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   in so oblike $[0, s]^T$, $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

   $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[s, -\frac{4}{7}s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(b) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(B - \lambda I) = (5 - \lambda)(1 - \lambda) - 12 = (\lambda - 7)(\lambda + 1)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -1$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[-3s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(c) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(C - \lambda I) = (-8 - \lambda)(3 - \lambda) + 18 = (\lambda + 6)(\lambda - 1)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -6$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[s, 3s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[s, \frac{2}{3}s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(d) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(D - \lambda I) = (-6 - \lambda)(1 - \lambda) + 6 = \lambda(\lambda + 5)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[s, 3s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[2s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(e) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(E - \lambda I) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 5 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[5s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[-s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(f) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(F - \lambda I) = (5 - \lambda)(-2 - \lambda) - 0 = (\lambda - 5)(\lambda + 2)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[\frac{7}{2}s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[0, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(g) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(G - \lambda I) = (3 - \lambda)(-2 - \lambda) - 14 = (\lambda - 5)(\lambda + 4)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -4$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[s, \frac{2}{7}s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[-s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(h) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(H - \lambda I) = (2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[4s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(i) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(J - \lambda I) = (-2 - \lambda)(1 - \lambda) - 18 = (\lambda + 5)(\lambda - 4)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -5$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -6 & -9 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[-\frac{3}{2}s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[3s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(j) Izračunamo karakteristični polinom

$$\det(K - \lambda I) = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 6 = \lambda(\lambda - 5)$$

in njegovi ničli $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 0$. Lastne vektorje, ki pripadajo λ_1, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[2s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje za λ_2 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in so oblike $[-3s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Rezultati, ki jih dobimo z Octaveom, so blizu izračunanim. Postopek izračuna je zapisan v skripti `testPotencna` ([1]).

4. S pomočjo karakterističnega polinoma izračunajte lastne vrednosti in lastne vektorje naslednjih matrik:

   (a)
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix},$$

   (b)
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

   (c)
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Rešitev.

(a) Najprej izračunajmo karakteristični polinom:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= (5-\lambda)\Big((1-\lambda)(-11-\lambda)+32\Big)- \\ &\quad - 8\Big(4(-11-\lambda)+32\Big)+16\Big(-16+4(1-\lambda)\Big) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda+3)^2.\end{aligned}$$

Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. Za λ_1 dobimo lastne vektorje iz

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 4 & 0 & 8 \\ -4 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

torej

$$\begin{aligned} 4x+8y+16z &= 0, \\ 4x+8z &= 0, \\ -4x-4y-12z &= 0 \end{aligned}$$

in $x=-2z, y=-z$. Lastni vektorji so oblike $[-2s,-s,s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Pri λ_2 imamo več možnosti, saj je -3 večkratna ničla. Sistem, ki ga dobimo, je

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 16 \\ 4 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poenostavimo ga v

$$x + y + 2z = 0,$$

od koder dobimo $x = -y - 2z$. Lastni vektorji so oblike $[-s - 2t, s, t]^T$, $s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. V tem primeru imamo dve družini linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Dva predstavnika sta npr. vektorja $x_1 = [-1, 1, 0]^T$ in $x_2 = [-2, 0, 1]^T$.

(b) Izračunajmo karakteristični polinom matrike,

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= (3-\lambda)\Big((0-\lambda)(3-\lambda) - 4\Big) - 2\Big(2(3-\lambda) - 8\Big) + \\ &+ 4\Big(4 - 4(0-\lambda)\Big) \\ &= -(\lambda - 8)(\lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Lastni vrednosti matrike sta $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -1$. Lastne vektorje za λ_1 dobimo iz

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kar poenostavimo v $x = 4y - z, z = 2y$. Od tu vidimo, da so lastni vektorji oblike $[2s, s, 2s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Lastne vektorje, ki pripadajo $\lambda_2 = -1$, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zgornje poenostavimo v $y = -2x - 2z$, torej so lastni vektorji oblike $[s, -2s - 2t, t]^T$, $s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(c) Karakteristični polinom matrike C je enak

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= (2-\lambda)\Big((-1-\lambda)(-5-\lambda) - 0\Big) - \\ &- 1\Big(-2(-5-\lambda) - 0\Big) + (-1)\Big(-2 \cdot 0 - 0\Big) \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 5), \end{aligned}$$

njegove ničle pa so enake $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -5$. Izračunajmo še lastne vektorje. Za λ_1 dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

torej so lastni vektorji oblike $[s, -s, 0]^T$, $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Za λ_2 dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in lastne vektorje oblike $[s, -2s, 0]^T$, $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Za λ_3 je sistem enak

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

zato so lastni vektorji oblike $[0, s, s]^T$, $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Opazimo tudi, da smo imeli že pri matrikah velikosti 3×3 precej več dela kot pri matrikah velikosti 2×2.

5. S pomočjo potenčne metode izračunajte približek za dominantni lastni par matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor izračunajte na dve decimalki natančno. Za začetni približek vzemite vektor $x_0 = [1, 1]^T$. S pomočjo karakteristične enačbe natančno izračunajte lastne vrednosti in normiran dominantni lastni vektor ter se prepričajte, da s potenčno metodo res dobite približek za dominantni lastni par.

Rešitev. Uporabimo algoritem za potenčno metodo:

$$x_1' = Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 0.8742 \\ 0.4856 \end{bmatrix},$$

$$x_2' = Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8742 \\ 0.4856 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.5363 \\ 2.8167 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 0.8913 \\ 0.4535 \end{bmatrix},$$

$$x_3' = Ax_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8913 \\ 0.4535 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.3946 \\ 2.7051 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 0.8939 \\ 0.4482 \end{bmatrix},$$

$$x_4' = Ax_3 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8939 \\ 0.4482 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.3712 \\ 2.6869 \end{bmatrix} \Rightarrow x_4 = \begin{bmatrix} 0.8943 \\ 0.4474 \end{bmatrix}.$$

S pomočjo Rayleighovega kvocienta izračunajmo še približek za lastno vrednost:

$$\rho(x_4) = x_4^T A x_4 = 6.0010.$$

Rezultat izračunajmo še s pomočjo programa `potencna` ([1]). Zaporedje ukazov, ki jih vpišemo v Octave, je:

```
A = [3,6;1,4];
x0 = [1;1];
[x,rho]=potencna(A,x0,4)
```

Zapišimo karakteristično enačbo

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(4-\lambda) - 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

in lastni vrednosti sta $\lambda_1 = 6$ in $\lambda_2 = 1$. Dominantna lastna vrednost je enaka 6. Poiščimo pripadajoči normiran lastni vektor:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 I) &= 0, \\
\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
x_1 - 2x_2 &= 0, \\
x_1 &= 2x_2.
\end{aligned}$$

Lastni vektorji so oblike $[2s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Enega izberemo, npr. vektor $x' = [2,1]^T$, in ga normiramo. Normiran dominantni lastni vektor je torej enak

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0.8944 \\ 0.4472 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da se rezultat na tri decimalke ujema z rezultatom, ki ga vrne potenčna metoda. Prav tako se približek za lastno vrednost, ki ga dobimo s pomočjo Rayleighovega kvocienta, ujema z natančno vrednostjo na dve decimalki.

6. S potenčno metodo poskusite poiskati dominantni lastni par matrike $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. Za začetni približek vzemite vektor $x_0 = [1,1]^T$. Razložite, kakšne težave nastanejo in zakaj. Poiščite vse lastne vrednosti matrike A in pripadajoče lastne vektorje.

Rešitev. Zaženemo algoritem in dobimo

$$\begin{aligned}
x_1' &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
x_2' &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}, \\
x_3' &= \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.6569 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ker je $x_3 = x_1$, metoda ne bo konvergirala. Pravimo, da se program "zacikla". Izračunajmo lastne vrednosti matrike A :

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) - 12 = (\lambda - 4)(\lambda + 4) = 0.$$

Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -4$. Ker velja $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, nimamo zagotovljene konvergence potenčne metode (nimamo enolične dominantne lastne vrednosti).

Najprej izračunajmo lastni vektor, ki pripada 4:

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 3x_2.$$

Lastni vektorji so oblike $[3s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Lastne vektorje, ki pripadajo -4, dobimo iz

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Ti lastni vektorji so oblike $[-s, s]^T$, $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

7. Dana je Hilbertova matrika `hilb(5)`. Z Octaveom preverite, da za poljubno komponento $x_{i,k}$ vektorjev x_i v poenostavljeni potenčni metodi:
   1 $\quad i = 0, 1, \ldots$
   2 $\qquad x_{i+1} = Ax_i$
   velja
   $$\frac{x_{i+1,k}}{x_{i,k}} \to \lambda_1, \quad k \to \infty.$$

   Rešitev. Definiramo matriko in lastne vrednosti izračunamo s pomočjo vgrajenega ukaza `eig` in po danem algoritmu. Postopek reševanja je zapisan v datoteki `testPotencnaKonv` ([1]).

8. S pomočjo Hotelingove redukcije izračunajte vse lastne vrednosti Hilbertove matrike iz naloge 7.

   Rešitev. Postopek reševanja je zapisan v datoteki `hoteling` ([1]). Lastne vrednosti, izračunane s Hotelingovo redukcijo, se ujemajo z lastnimi vrednostmi, ki jih dobimo z vgrajenim ukazom `eig`.

9. Naj bo `A=hilb(5)` in `[v,l]=eig(A)`. Vzemimo za začetni vektor potenčne metode kar `x0=v(:,1)`, torej lastni vektor, ki pripada najmanjši lastni vrednosti matrike A. Z izvajanjem nekaj korakov potenčne metode numerično preverite, da rezultat skonvergira k dominantni lastni vrednosti.

   Rešitev. Uporabimo program `potencna` ([1]) in v Octave zapišemo ukaze

```
A = hilb(5);
[v,l] = eig(A);
x0 = v(:,1);
[x,rho] = potencna(A,x0,10)
```

10. Dana je matrika `A=hilb(5)` in približek za njeno lastno vrednost $\sigma = 0.2$. Z inverzno potenčno metodo izračunajte pripadajoči lastni vektor.

    Rešitev. Uporabimo program `invPotencna` ([1]) in v Octave zapišemo ukaze

```
A = hilb(5);
sigma = 0.2;
x0 = rand(5,1);
[x,rho] = invPotencna(A,x0,sigma,10)
```

11. S pomočjo Šturmovega zaporedja izračunajte število lastnih vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

    na intervalu $[-2, 2]$. Nato v Octaveu s pomočjo bisekcije izračunajte vse lastne vrednosti na $[-2, 2]$.

    Rešitev. Najprej izračunamo število lastnih vrednosti matrike A, ki so večje od -2. Zato s pomočjo rekurzivne formule (9.1) izračunamo

Šturmovo zaporedje za $\lambda = -2$:

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1,\\
f_1 &= a_1 - \lambda = 1 + 2 = 3,\\
f_2 &= (a_2 - \lambda) f_1 - b_1^2 f_0 = (3 + 2) \cdot 3 - 2^2 \cdot 1 = 11,\\
f_3 &= (a_3 - \lambda) f_2 - b_2^2 f_1 = (5 + 2) \cdot 11 - 4^2 \cdot 3 = 29,\\
f_4 &= (a_4 - \lambda) f_3 - b_3^2 f_2 = (7 + 2) \cdot 29 - 6^2 \cdot 11 = -135.
\end{aligned}$$

Predznaki števil v zaporedju so $+, +, +, +, -$, torej imamo 3 ujemanja. Ker so v zaporedju 3 ujemanja predznakov, ima matrika A tri lastne vrednosti večje od -2. Postopek ponovimo za $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1,\\
f_1 &= a_1 - \lambda = 1 - 2 = -1,\\
f_2 &= (a_2 - \lambda) f_1 - b_1^2 f_0 = (3 - 2) \cdot (-1) - 2^2 \cdot 1 = -5,\\
f_3 &= (a_3 - \lambda) f_2 - b_2^2 f_1 = (5 - 2) \cdot (-5) - 4^2 \cdot (-1) = 1,\\
f_4 &= (a_4 - \lambda) f_3 - b_3^2 f_2 = (7 - 2) \cdot 1 - 6^2 \cdot (-5) = 185.
\end{aligned}$$

Dobimo zaporedje $1, -1, -5, 1, 185$, v katerem sta 2 ujemanji predznakov. Torej sta dve lastni vrednosti večji od 2 in na intervalu $[-2, 2]$ je natanko ena lastna vrednost matrike A.

Za določitev iskane lastne vrednosti računamo determinanto matrike $A - \lambda I$ za različne vrednosti λ. Lastno vrednost dobimo pri vrednosti λ, ki nam da determinanto enako 0. Determinanto lahko računamo z vgrajeno funkcijo `det` ali s pomočjo rekurzivne formule (9.1), saj je determinanta matrike ravno zadnje število Šturmovega zaporedja. Rezultati so:

Pri $\lambda = 0$ je vrednost determinante enaka -111, pri $\lambda = 1$ pa 48. Torej je iskana lastna vrednost na intervalu $[0, 1]$. Za 0.5 dobimo -33.43, pri 0.75 pa 7.44. Pri 0.7 je vrednost determinante enaka -0.75, pri 0.71 pa 0.89. Torej je lastna vrednost na $[0.7, 0.71]$. Še par korakov nam da $\lambda = 0.7045$.

Preverimo rezultat tako, da z Octaveom izračunamo lastne vrednosti matrike A z vgrajenim ukazom `eig`, ki nam vrne lastne vrednosti $-2.48479, 0.704565, 4.93655, 12.8437$, med katerimi je $\lambda = 0.704$ res edina na intervalu $[-2, 2]$.

12. Izračunajte singularne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Opomba: Singularne vrednosti matrike A so kvadratni koreni lastnih vrednosti matrike $A^T A$. Za računanje lastnih vrednosti lahko uporabite vgrajeno funkcijo `eig`.

Rešitev. V Octave vpišemo ukaza

```
A = [1,2,3;4,5,6;7,8,9];
sqrt(eig(A'*A))
```

13. Eden izmed algoritmov za lepo risanje kubičnih poliedrskih grafov (graf predstavlja oglišča in stranice nekega poliedra, kjer se v vsakem oglišču srečajo tri stranice) uporablja lastne vektorje in lastne vrednosti matrike sosednosti grafa. Matrika sosednosti A je matrika dimenzije $n \times n$, kjer je n število točk grafa, ki ima na (i, j)-tem mestu 1, če sta točki i in j povezani, sicer pa 0. Za kubične poliedrske grafe je največja lastna vrednost matrike sosednosti enaka 3, pripadajoči lastni vektor pa je enak $[1\ 1\ \cdots\ 1]^T$. Izračunamo λ_2, λ_3 in λ_4 ter pripadajoče normirane lastne vektorje, ki jih po vrsti označimo z x, y, z. Če za koordinate $i-$te točke vzamemo $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, dobimo lepo tridimenzionalno sliko grafa.

    Naloga: V programu `kubicnigraf` ([1]) so zapisani podatki kubičnega poliedrskega grafa. Ukaz `G=kubicnigraf()` vrne matriko G, v kateri je $i-$ta vrstica oblike

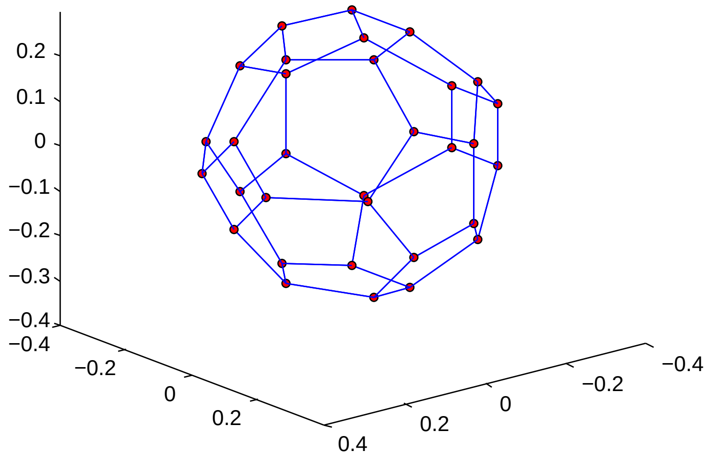
    $$i \quad a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3},$$

    kjer je i indeks točke, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} pa so indeksi njenih treh sosedov. Iz teh podatkov sestavite matriko sosednosti A in s pomočjo zgoraj opisanega algoritma določite koordinate točk grafa G in narišite njegovo sliko. Pri risanju grafa v Octaveu si pomagajte s funkcijo `gplot3` ([1]).

    Rešitev. Uporabimo program `risanjeGrafa` ([1]) in v Octave vpišemo ukaze

    ```
    G = kubicnigraf();
    risanjeGrafa(G)
    ```

    Sliko, ki jo vrne Octave, malce zavrtimo, da dobimo boljšo tridimenzionalno predstavo. Rezultat je slika 9.1.



Slika 9.1: Slika grafa G.

Poglavje 10

Interpolacija

Dane so točke $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ in vrednosti funkcije f v teh točkah $y_0, y_1, \ldots, y_n$, torej $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n$. Iščemo polinom p stopnje $\leq n$, za katerega velja $p(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.
Tak polinom zapišemo v *Lagrangeovi obliki* kot

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x), \ \text{kjer so} \\ \ell_i(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \ \text{Lagrangeovi bazni polinomi.} \end{aligned}$$

V *Newtonovi obliki* polinom p zapišemo z uporabo *deljenih diferenc:* $k-$ta deljena diferenca $[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f$ je vodilni koeficient polinoma stopnje $\leq k$, ki se z dano funkcijo f ujema v različnih točkah $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$. Za deljene diference velja rekurzivna formula

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}, \text{ za } x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k}, \\ \frac{[x_i, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_{i+k}]f - [x_i, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{i+k}]f}{x_s - x_r}, \ x_r \neq x_s. \end{cases}$$

Torej v posebnem velja

$$\begin{aligned} [x_i]f &= f(x_i), \\ [x_1, x_2]f &= \frac{[x_1]f - [x_2]f}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \\ [x_1, x_1]f &= f'(x_1), \\ [x_1, x_1, x_1]f &= \frac{f''(x_1)}{2}, \\ [x_1, x_2, \ldots, x_n]f &= \frac{[x_1, \ldots, x_{n-1}]f - [x_2, \ldots, x_n]f}{x_1 - x_n}. \end{aligned}$$

Interpolacijski polinom v *Newtonovi obliki* je

$$
\begin{aligned}
p(x) = f(x_0) &+ [x_0,x_1]f\cdot(x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f\cdot(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\\
&+[x_0,x_1,\ldots,x_n]f\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),
\end{aligned}
$$

napaka interpolacije pa je

$$
\begin{aligned}
f(x)-p(x) &= [x_0,x_1,\ldots,x_n,x]f\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),\ \xi\in[x_0,x_n].
\end{aligned}
$$

Deljene diference zapišemo v shemo oblike

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & [.]f & [.,.]f & [.,.,.]f & [.,.,.,.]f \\
\hline
x_0 & y_0 & & & \\
 & & [x_0,x_1]f & & \\
x_1 & y_1 & & [x_0,x_1,x_2]f & \\
 & & [x_1,x_2]f & & [x_0,x_1,x_2,x_3]f \\
x_2 & y_2 & & [x_1,x_2,x_3]f & \\
 & & [x_2,x_3]f & & \\
x_3 & y_3 & & &
\end{array}
$$

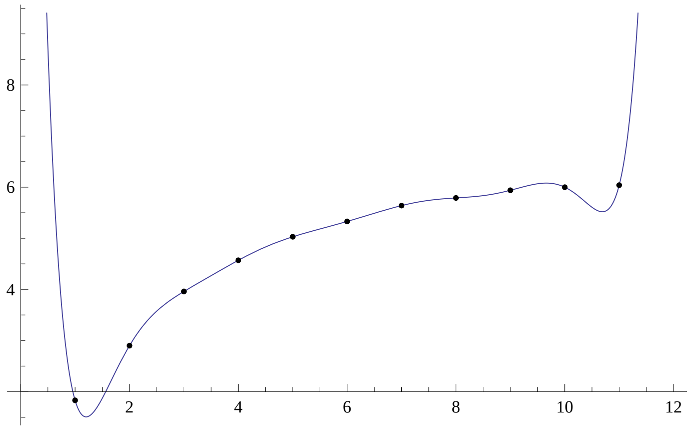
Opozorimo še na razliko med *interpolacijo* in *aproksimacijo*, kamor med drugim spada tudi reševanje predoločenih sistemov. V obeh primerih so dane točke. Pri aproksimaciji je krivulja potekala v bližini danih točk (sliki 8.12, 8.10, ...). Pri interpolaciji pa krivuljo določimo tako, da poteka *skozi* vse dane točke. Če za podatke iz naloge 30, poglavje 8, izračunamo in narišemo interpolacijski polinom (slika 10.1), je razlika med obema metodama očitna.

10.1 Naloge

1. Interpolirajte točke (1,1), (2,5), (3,3), (4,8) s kubičnim polinomom.

   Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_i & [.]f & [.,.]f & [.,.,.]f & [.,.,.,.]f \\
\hline
1 & 1 & & & \\
 & & \frac{5-1}{2-1}=4 & & \\
2 & 5 & & \frac{-2-4}{3-1}=-3 & \\
 & & \frac{3-5}{3-2}=-2 & & \frac{\frac{7}{2}-(-3)}{4-1}=\frac{13}{6} \\
3 & 3 & & \frac{5-(-2)}{4-2}=\frac{7}{2} & \\
 & & \frac{8-3}{4-3}=5 & & \\
4 & 8 & & &
\end{array}
$$



Slika 10.1: Dane točke in interpolacijski polinom. Primerjajte s sliko 8.12.

Torej je iskani interpolacijski polinom enak

$$p(x) = 1 + 4(x-1) - 3(x-1)(x-2) + \frac{13}{6}(x-1)(x-2)(x-3).$$

2. Interpolirajte točke (0,1), (-1,3), (-2,2), (-3,4) s kubičnim polinomom.

   Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
0	1			
		$\frac{3-1}{-1-0} = -2$		
-1	3		$\frac{1-(-2)}{-2-0} = -\frac{3}{2}$	
		$\frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$		$\frac{\frac{3}{2}-(-\frac{3}{2})}{-3-0} = -1$
-2	2		$\frac{-2-1}{-3-(-1)} = \frac{3}{2}$	
		$\frac{4-2}{-3-(-2)} = -2$		
-3	4			

   Torej je iskani interpolacijski polinom enak

$$p(x) = 1 - 2x - \frac{3}{2}x(x+1) - x(x+1)(x+2).$$

3. Poiščite interpolacijski polinom, za katerega velja

$$p(0) = -2,\ p(1) = 2,\ p(3) = 4,\ p(4) = -10.$$

   Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
0	-2			
		$\frac{2-(-2)}{1-0} = 4$		
1	2		$\frac{1-4}{3-0} = -1$	
		$\frac{4-2}{3-1} = 1$		$\frac{-5-(-1)}{4-0} = -1$
3	4		$\frac{-14-1}{4-1} = -5$	
		$\frac{-10-4}{4-3} = -14$		
4	-10			

Torej je iskani interpolacijski polinom enak

$$\begin{aligned} p(x) &= -2 + 4(x-0) - 1(x-0)(x-1) - 1(x-0)(x-1)(x-3) \\ &= -2 + 4x - x(x-1) - x(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

4. Interpolirajte funkcijo $f(x) = \ln x$ na [1,2] s kubičnim polinomom, ki se z f ujema dvojno v obeh krajiščih.

   Rešitev. Zapišimo tabelo deljenih diferenc:

x_i	$[.]f$	$[.,.]f$	$[.,.,.]f$	$[.,.,.,.]f$
1	0			
		1		
1	0		-0.306853	
		0.693147		0.113706
2	0.693147		-0.193147	
		0.5		
2	0.693147			

   Torej je iskani interpolacijski polinom enak

$$p(x) = 0 + 1(x-1) - 0.306853(x-1)^2 + 0.113706(x-1)^2(x-2).$$

5. Dana je funkcija $f(x) = \frac{4}{1+x}$. Preko deljenih diferenc poiščite interpolacijski polinom p stopnje ≤ 5, za katerega velja

$$\begin{aligned} p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0),\ p''(0) = f''(0), \\ p(1) = f(1),\ p'(1) = f'(1),\ p''(1) = f''(1). \end{aligned}$$

   Ocenite tudi napako $\max |f(x) - p(x)|$ za $x \in [0,1]$.

   Rešitev. Najprej izračunajmo vrednosti funkcije f in njenih odvodov v danih točkah,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4(1+x)^{-2}, \\ f''(x) &= 8(1+x)^{-3}, \\ f(0) &= 4,\ f'(0) = -4,\ f''(0) = 8, \\ f(1) &= 2,\ f'(1) = -1,\ f''(1) = 1. \end{aligned}$$

Zapišimo tabelo deljenih diferenc,

x_i	$[.]f$	$[..]f$	$[...]f$	$[....]f$	$[.....]f$
0	4				
		-4			
0	4		$\frac{8}{2} = 4$		
		-4		$\frac{2-4}{1-0} = -2$	
0	4		$\frac{-2-(-4)}{1-0} = 2$		$\frac{-1-(-2)}{1-0} = 1$
		$\frac{2-4}{1-0} = -2$		$\frac{1-2}{1-0} = -1$	
1	2		$\frac{-1-(-2)}{1-0} = 1$		$\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{1-0} = \frac{1}{2}$
		-1		$\frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$	
1	2		$\frac{1}{2}$		
		-1			
1	2				

$[.....]f = \frac{\frac{1}{2}-1}{1-0} = -\frac{1}{2}$

V zapisu polinoma nastopajo koeficienti, ki so zapisani na zgornji diagonali tabele, torej je interpolacijski polinom v Newtonovi obliki enak

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 4 - 4(x-0) + 4x^2 - 2x^3 + 1x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2 \\
&= 4 - 4x + 4x^2 - 2x^3 + x^3(x-1) - \frac{1}{2}x^3(x-1)^2.
\end{aligned}
$$

Ocenimo še napako. Velja

$$
f(x) - p(x) = [0,0,0,1,1,1,x]f \cdot x^3(x-1)^3 = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\, x^3(x-1)^3,
$$

kjer je $\xi \in [0,1]$. Maksimum funkcije $x^3(x-1)^3$ je na $[0,1]$ dosežen pri

$$
\begin{aligned}
3x^2(x-1)^3 + 3x^3(x-1)^2 &= 0, \\
3x^2(x-1)^2(2x-1) &= 0, \\
x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 &= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

torej pri $x = \frac{1}{2}$. Zato velja

$$
|x^3(x-1)^3| \leq \left|\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2} - 1\right)^3\right| = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \text{ za } x \in [0,1].
$$

Izračunajmo še odvod,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 8(1+x)^{-3},\\
f'''(x) &= -24(1+x)^{-4},\\
f^{(4)}(x) &= 96(1+x)^{-5},\\
f^{(5)}(x) &= -480(1+x)^{-6},\\
f^{(6)}(x) &= 2880(1+x)^{-7}.
\end{aligned}$$

Funkcija $f^{(6)}(x)$ doseže maksimum na intervalu [0,1] pri $x = 0$. Tam ima vrednost 2880. Zdaj ocenimo

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{2880}{720} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{16}.$$

Poglavje 11

Bézierove krivulje

Bézierova krivulja stopnje n je določena z $n+1$ kontrolnimi točkami, ki jih označimo s $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Definirana je kot

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t),\ 0 \le t \le 1,$$

kjer so

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Bernsteinovi polinomi.
Zlepek dveh Bézierovih krivulj, danih s kontrolnimi točkami $P_0, P_1, \ldots, P_n$ in $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, je zvezen, če velja $Q_0 = P_n$. Zlepek je G^1 zvezen (geometrijsko zvezen reda 1), če točka P_n leži na daljici med P_{n-1} in Q_1.
Točke na Bézierovi krivulji lahko računamo s pomočjo *de Casteljauovega algoritma.*
Algoritem (de Casteljau):
podatki: $P_0, P_1, \ldots, P_n$, in t

$i = 0, 1, \ldots, n$
    $b_i^0 = P_i$
$r = 1, 2, \ldots, n$
    $i = 0, 1, \ldots, n-r$
        $b_i^r(t) = (1-t) b_i^{r-1}(t) + t\, b_{i+1}^{r-1}(t)$,

Vrednost $b_0^n(t) = p(t)$ je točka na Bézierovi krivulji.

11.1 Naloge

1. Zapišite enačbe za linearno, kvadratično in kubično Bézierovo krivuljo.

Rešitev. Najprej zapišimo enačbo linearne Bézierove krivulje ($n = 1$):

$$p(t) = \sum_{i=0}^{1} P_i B_i^1(t).$$

Podani morata biti dve kontrolni točki P_0 in P_1. Izračunajmo Bernsteinove polinome,

$$\begin{aligned}
B_0^1(t) &= \binom{1}{0} t^0 (1-t)^{1-0} = 1 - t, \\
B_1^1(t) &= \binom{1}{1} t^1 (1-t)^{1-1} = t.
\end{aligned}$$

Torej je linearna Bézierova krivulja oblike

$$p(t) = P_0(1-t) + P_1\, t.$$

Oglejmo si enačbo kvadratične Bézierove krivulje ($n = 2$). Enačba je oblike

$$p(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i B_i^2(t).$$

Dane morajo biti tri kontrolne točke P_0, P_1, P_2, Bernsteinovi polinomi pa so enaki

$$\begin{aligned}
B_0^2(t) &= \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = (1-t)^2, \\
B_1^2(t) &= \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t(1-t), \\
B_2^2(t) &= \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2.
\end{aligned}$$

Enačba kvadratične Bézierove krivulje je torej

$$p(t) = P_0(1-t)^2 + P_1 \cdot 2t(1-t) + P_2 t^2. \tag{11.1}$$

Kubična Bézierova krivulja ($n = 3$) je oblike

$$p(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_i^3(t).$$

Dane morajo biti štiri kontrolne točke, Bernsteinovi polinomi pa so

$$
\begin{aligned}
B_0^3(t) &= \binom{3}{0} t^0(1-t)^{3-0} = (1-t)^3, \\
B_1^3(t) &= \binom{3}{1} t^1(1-t)^{3-1} = 3t(1-t)^2, \\
B_2^3(t) &= \binom{3}{2} t^2(1-t)^{3-2} = 3t^2(1-t), \\
B_3^3(t) &= \binom{3}{3} t^3(1-t)^{3-3} = t^3.
\end{aligned}
$$

Kubična Bézierova krivulja je oblike

$$
p(t) = P_0(1-t)^3 + P_1 \cdot 3t(1-t)^2 + P_2 \cdot 3t^2(1-t) + P_3 t^3. \tag{11.2}
$$

2. Pokažite, da ima Bernsteinov polinom $B_i^n(t)$ maksimum v točki $t = \frac{i}{n}$. Kakšna je vrednost polinoma v maksimumu?

   Rešitev. Najprej si oglejmo primer, ko $i \neq 0, i \neq n$, saj v tem primeru Bernsteinov polinom doseže maksimum v stacionarni točki (v točkah $t = 0$ in $t = 1$ je enak 0, za $0 < t < 1$ pa je pozitiven). Odvajajmo Bernsteinov polinom in poiščimo ničle odvoda

$$
\begin{aligned}
\left(B_i^n(t)\right)' = \binom{n}{i} \left(it^{i-1}(1-t)^{n-i} - t^i(n-i)(1-t)^{n-i-1}\right)&, \\
t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}\left(i(1-t) - (n-i)t\right) &= 0, \\
i(1-t) - (n-i)t &= 0, \\
i - it - nt + it &= 0, \\
t &= \frac{i}{n}.
\end{aligned}
$$

   Vedno velja $B_i^n(t) \leq 1$ za $0 \leq t \leq 1$. Zato polinom $B_0^n(t)$ doseže maksimum v $t = 0$, saj je $B_0^n(0) = 1$, podobno polinom $B_n^n(t)$ maksimum doseže v $t = 1$. S tem smo dokazali, da je maksimum dosežen v $t = \frac{i}{n}$. V maksimumu je vrednost Bernsteinovega polinoma enaka

$$
\begin{aligned}
B_i^n\left(\frac{i}{n}\right) &= \binom{n}{i}\left(\frac{i}{n}\right)^i\left(1 - \frac{i}{n}\right)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i}\frac{i^i}{n^i}\,\frac{(n-i)^{n-i}}{n^{n-i}} \\
&= \binom{n}{i}\frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^n}.
\end{aligned}
$$

3. Zapišite Bézierovo krivuljo, ki je podana s kontrolnimi točkami

$$P_0 = [2,2]^T,\ P_1 = \left[1, \frac{3}{2}\right]^T,\ P_2 = \left[\frac{7}{2}, 0\right]^T,\ P_3 = [4,1]^T.$$

Rešitev. Iz podatkov razberemo, da gre za kubično Bézierovo krivuljo ($n = 3$), zato uporabimo enačbo (11.2). Vstavimo dane točke,

$$\begin{aligned} p(t) &= [2,2]^T(1-t)^3 + \left[1, \frac{3}{2}\right]^T 3t(1-t)^2 + \left[\frac{7}{2}, 0\right]^T 3t^2(1-t) + [4,1]^T t^3 \\ &= \begin{bmatrix} 2(1-3t+3t^2-t^3) + 1 \cdot 3t(1-2t+t^2) + \frac{7}{2} \cdot 3t^2(1-t) + 4t^3 \\ 2(1-3t+3t^2-t^3) + \frac{3}{2} \cdot 3t(1-2t+t^2) + 0 \cdot 3t^2(1-t) + 1 \cdot t^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 3t + 10.5t^2 - 5.5t^3 \\ 2 - 1.5t - 3t^2 + 3.5t^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Poiščite pogoj za kontrolne točke kubične Bézierove krivulje, da bo krivulja stopnje 2.

Rešitev. Spet uporabimo enačbo (11.2). Hočemo, da so koeficienti pri kubičnih členih enaki 0, torej

$$\begin{aligned} p(t) = P_0(1-3t+3t^2-t^3) + P_1 \cdot 3t(1-2t+t^2) + \\ + P_2 \cdot 3t^2(1-t) + P_3 t^3, \\ -P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3 = 0, \\ P_3 - P_0 = 3(P_2 - P_1). \end{aligned}$$

5. Dani sta začetna in končna kontrolna točka P_0 in P_3 kubične Bézierove krivulje in tangenti d_0 in d_3 v teh točkah. Poiščite ostale kontrolne točke Bézierove krivulje, da bo veljalo

$$\begin{aligned} p(0) &= P_0, \\ p(1) &= P_3, \\ p'(0) &= d_0, \\ p'(1) &= d_3. \end{aligned}$$

Rešitev. Iz enačbe (11.2) vidimo, da bo vedno veljalo $p(0) = P_0$ in $p(1) = P_3$. Odvajajmo enačbo (11.2) in zapišimo pogoje,

$$\begin{aligned} p'(t) &= -P_0 \cdot 3(1-t)^2 + 3P_1((1-t)^2 - t \cdot 2(1-t)) + \\ &\quad + 3P_2(2t(1-t) - t^2) + 3P_3 t^2, \\ p'(0) &= -P_0 \cdot 3 + 3P_1 = d_0, \\ p'(1) &= -3P_2 + 3P_3 = d_3. \end{aligned}$$

Torej mora biti

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{3}d_0 \text{ in } P_2 = P_3 - \frac{1}{3}d_3.$$

6. Dane so kontrolne točke $P_3 = Q_0 = [6, -1]^T, Q_1 = [7, 0]^T$ dveh sosednjih Bézierovih krivulj. Kje mora ležati točka P_2, da bo zlepek krivulj G^1 zvezen?

   Rešitev. Vemo, da mora P_2 ležati na isti premici kot P_3 in Q_1, tj. na premici $y = x - 7$. Če označimo koordinati točke $P_2 = [a, b]^T$, mora torej veljati
   $$b = a - 7.$$
   Paziti moramo še na to, da si bodo kontrolne točke sledile v pravilnem vrstnem redu - če se premikamo po premici, mora biti točka $P_3 = Q_0$ med P_2 in Q_1, torej mora biti $a < 6$.

7. V splošnem kvadratična Bézierova krivulja poteka skozi prvo in zadnjo kontrolno točko, ne pa tudi skozi vmesno. Če so kontrolne točke P_0, P_1 in P_2 kolinearne, se zdi, da bo krivulja premica in da bo potekala tudi skozi notranjo točko. Ali je to res?

   Rešitev. Če so točke kolinearne, lahko eno točko izrazimo kot linearno kombinacijo drugih dveh. Predpostavimo, da velja
   $$P_1 = (1 - \alpha)P_0 + \alpha P_2 \text{ za nek } \alpha \in \mathbb{R}.$$
   Splošna oblika Bézierove krivulje, dane s tremi kontrolnimi točkami (enačba (11.1)), se poenostavi v
   $$\begin{aligned} p(t) &= P_0(1-t)^2 + ((1-\alpha)P_0 + \alpha P_2) \cdot 2t(1-t) + P_2 t^2 \\ &= P_0 + P_0(-t^2 - 2\alpha t + 2\alpha t^2) + P_2(t^2 + 2\alpha t - 2\alpha t^2) \\ &= P_0 + (P_2 - P_0)(t^2 + 2\alpha t - 2\alpha t^2) \\ &= P_0 + (P_2 - P_0)s, \end{aligned}$$
   kjer je s nov parameter. Zadnja enačba je reprezentacija premice skozi točki P_0 in P_2, torej je Bézierova krivulja geometrijsko kar premica.

8. Dana je parametrična polinomska krivulja
   $$p(t) = \begin{bmatrix} 1 + t + t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \ 0 \le t \le 1.$$
   Zapišite jo v Bézierovi obliki.

Rešitev. Krivulja je stopnje 3, torej iščemo 4 kontrolne točke. Vemo, da gre krivulja skozi robni točki, torej je

$$P_0 = p(0) = [1,0]^T,\ P_3 = p(1) = [3,1]^T.$$

Iščemo še točki $P_1 = [x_1, y_1]^T,\ P_2 = [x_2, y_2]^T$. To vstavimo v splošno enačbo kubične Bézierove krivulje (11.2),

$$\begin{gathered}(1-t)^3 + x_1 \cdot 3t(1-t)^2 + x_2 \cdot 3t^2(1-t) + 3t^3 = 1 + t + t^2,\\ y_1 \cdot 3t(1-2t+t^2) + y_2(3t^2 - 3t^3) + t^3 = t^3\end{gathered}$$

in rešimo sistem:

$$\begin{aligned}
\text{prva komponenta:}&\\
&t^3:\ -1 + 3x_1 - 3x_2 + 3 = 0,\\
&t^2: 3 - 6x_1 + 3x_2 = 1,\\
&t:\ -3 + 3x_1 = 1,\\
&1: 1 = 1,\\
\text{druga komponenta:}&\\
&t^3: 3y_1 - 3y_2 + 1 = 1,\\
&t^2:\ -6y_1 + 3y_2 = 0,\\
&t: 3y_1 = 0,\\
&1: 0 = 0.
\end{aligned}$$

Rešitve so

$$x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0.$$

Iskane kontrolne točke so torej

$$P_0 = [1,0]^T,\ P_1 = \left[\frac{4}{3}, 0\right]^T,\ P_2 = [2,0]^T,\ P_3 = [3,1]^T.$$

9. Dano Bézierovo krivuljo, določeno s kontrolnimi točkami $P_0, P_1, \ldots, P_n$, bi radi zapisali kot polinom višje stopnje. Pokažite, da morajo biti kontrolne točke $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ nove Bézierove krivulje enake

$$Q_i = \alpha_i P_{i-1} + (1-\alpha_i)P_i,\ \alpha_i = \frac{i}{n+1},\ i = 0, 1, \ldots, n+1. \tag{11.3}$$

Namig: Najprej pokažite, da velja

$$
\begin{aligned}
(1-t)B_i^n(t) &= \frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t),\\
tB_i^n(t) &= \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t),\\
B_i^n(t) &= \frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t).
\end{aligned}
$$

Rešitev. Najprej pokažimo, da veljajo enačbe iz namiga,

$$
\begin{aligned}
\frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) &= \frac{n+1-i}{n+1}\binom{n+1}{i} t^i(1-t)^{n+1-i}\\
&= \frac{n+1-i}{n+1}\, \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!}\, t^i(1-t)^{n+1-i}\\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}\, t^i(1-t)^{n-i}(1-t)\\
&= (1-t)B_i^n(t),\\
\frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t) &= \frac{i+1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} t^{i+1}(1-t)^{n+1-i-1}\\
&= \frac{i+1}{n+1}\, \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}\, t^{i+1}(1-t)^{n-i}\\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!}\, t\, t^i(1-t)^{n-i}\\
&= tB_i^n(t),\\
\frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t) &= (1-t)B_i^n(t) + tB_i^n(t)\\
&= B_i^n(t).
\end{aligned}
$$

Zapišimo Bézierovo krivuljo z uporabo zadnje enačbe iz namiga,

$$\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P_i \left(\frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) + \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P_i\, \frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n} P_i\, \frac{i+1}{n+1}\, B_{i+1}^{n+1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} P_i\, \frac{n+1-i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{n+1} P_{i-1}\, \frac{i}{n+1}\, B_i^{n+1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{n+1-i}{n+1}\, P_i + \frac{i}{n+1}\, P_{i-1} \right) B_i^{n+1}(t).
\end{aligned}$$

Če označimo $\alpha_i = \frac{i}{n+1}$, je torej

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n+1} \left(\underbrace{(1-\alpha_i)P_i + \alpha_i P_{i-1}}_{Q_i} \right) B_i^{n+1}(t),$$

kar smo želeli dokazati.

10. Zvišajte stopnjo Bézierovi krivulji, dani s kontrolnimi točkami

$$P_0 = [0,0]^T,\ P_1 = [1,2]^T,\ P_2 = [3,2]^T,\ P_3 = [2,0]^T.$$

Zapišite obe krivulji.

Rešitev. Najprej zapišimo dano kubično Bézierovo krivuljo, pri tem uporabimo enačbo (11.2),

$$\begin{aligned}
p(t) &= \begin{bmatrix} 0 + 3t(1-t)^2 + 3\cdot 3t^2(1-t) + 2t^3 \\ 0 + 2\cdot 3t(1-t)^2 + 2\cdot 3t^2(1-t) + 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4t^3 + 3t^2 + 3t \\ -6t^2 + 6t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Iz enačbe (11.3) izračunajmo kontrolne točke za krivuljo višje stopnje,

$$\begin{aligned}
Q_0 &= P_0 = [0,0]^T, \\
Q_1 &= \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}P_1 = \left[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]^T, \\
Q_2 &= \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 = [2,2]^T, \\
Q_3 &= \frac{3}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 = \left[\frac{11}{4}, \frac{3}{2}\right]^T, \\
Q_4 &= P_3 = [2,0]^T.
\end{aligned}$$

Zapišimo še novo krivuljo,

$$\begin{aligned}
p(t) &= Q_0(1-t)^4 + Q_1 \cdot 4t(1-t)^3 + Q_2 \cdot 6t^2(1-t)^2 + Q_3 \cdot 4t^3(1-t) + Q_4 t^4 \\
&= \begin{bmatrix} -4t^3 + 3t^2 + 3t \\ -6t^2 + 6t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da sta krivulji enaki. Višanje stopnje uporabimo, kadar želimo večjo fleksibilnost in več svobode pri kasnejšem oblikovanju.

11. Kvadratni Bézierovi krivulji, definirani s kontrolnimi točkami P_0, P_1 in P_2, dvakrat povišajte stopnjo in zapišite nove kontrolne točke.

Rešitev. Uporabimo rezultat (11.3) za $n = 2$, da dobimo nove kontrolne točke

$$\begin{aligned}
Q_0 &= P_0, \\
Q_1 &= \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1, \\
Q_2 &= \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2, \\
Q_3 &= P_2.
\end{aligned}$$

Še enkrat uporabimo (11.3), tokrat za $n = 3$, in rezultat so točke

$$\begin{aligned}
R_0 &= Q_0 = P_0, \\
R_1 &= \frac{1}{4}Q_0 + \frac{3}{4}Q_1 = \frac{1}{4}P_0 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1\right) = \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_1, \\
R_2 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2\right) = \frac{1}{6}P_0 + \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{6}P_2, \\
R_3 &= \frac{3}{4}Q_2 + \frac{1}{4}Q_3 = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2\right) + \frac{1}{4}P_2 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2, \\
R_4 &= Q_3 = P_2.
\end{aligned}$$

12. Dane so kontrolne točke

$$P_0 = [0, 0]^T,\ P_1 = [0, 2]^T,\ P_2 = [8, 2]^T,\ P_3 = [4, 0]^T.$$

S pomočjo de Casteljauovega algoritma izračunajte vrednost pripadajoče Bézierove krivulje pri $t = \frac{1}{4}$.

Rešitev. Vrednosti zapišimo v tabelo:

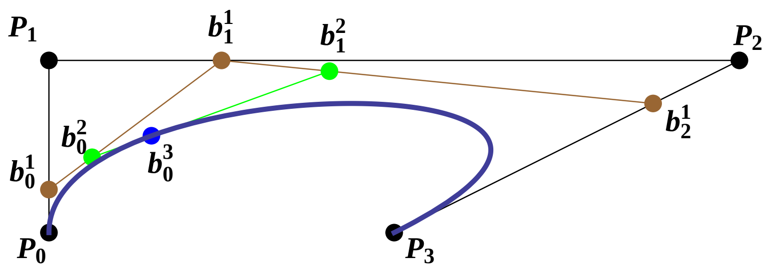
$$b_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b_0^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad b_0^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$$b_2^0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b_1^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b_1^2 = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix} \quad b_0^3 = \begin{bmatrix} \frac{19}{16} \\ \frac{9}{8} \end{bmatrix}$$

$$b_3^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2^1 = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Vrednost Bézierove krivulje pri $t = \frac{1}{4}$ je $\begin{bmatrix} \frac{19}{16} \\ \frac{9}{8} \end{bmatrix}$.



Slika 11.1: Skica delovanja de Casteljauovega algoritma. Animacijo si lahko ogledate na `http://en.wikipedia.org/wiki/Bezier_curve`.

Poglavje 12

Numerično odvajanje

Splošno pravilo za numerično odvajanje je oblike

$$f'(x_i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i y_i}_{\text{pravilo}} + \underbrace{c f^{(m)}(\xi),}_{\text{napaka metode}} \quad x_0 \leq \xi \leq x_n,$$

kjer so točke $x_i = x_0 + ih$ ekvidistantne in $y_i = f(x_i)$. Koeficiente a_i določimo po metodi nedoločenih koeficientov. Najprej izberemo bazo prostora polinomov in koeficiente določimo tako, da je pravilo točno za polinome čim višjih stopenj. Napako določimo s pomočjo polinoma višje stopnje.
Pri numeričnem odvajanju sta pomembni dve vrsti napak - ena je napaka metode, ki jo lahko ocenimo z

$$|D_m| \leq |c| \max_{x_0 \leq x \leq x_n} \left| f^{(m)}(x) \right|,$$

druga napaka pa je neodstranljiva napaka D_n, do katere pride zato, ker namesto s točnimi vrednostmi $f(x_i)$ računamo s približki za točno vrednost $\widetilde{y}_i$. Predpostavimo, da velja

$$|f(x_i) - \widetilde{y}_i| \leq u,$$

kjer je u osnovna zaokrožitvena napaka. Skupna napaka metode D je omejena z

$$|D| \leq |D_m| + |D_n|.$$

Če poznamo oceni za $\max_{x_0 \leq x \leq x_n} \left| f^{(m)}(x) \right|$ in u, lahko določimo optimalni h, pri katerem bo skupna napaka najmanjša.

12.1 Naloge

1. Izpeljite formulo za numerično odvajanje

$$f'(x_0) = Ay_0 + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + Ef^{(m)}(\xi).$$

Rešitev. Izberemo bazo $\{1, x - x_0, (x - x_0)^2, \ldots\}$ in bazne funkcije vstavimo v formulo,

$$\begin{aligned}
f = 1 : \; 0 &= A + B + C + D, \\
f = x - x_0 : \; 1 &= A \cdot 0 + Bh + C \cdot 2h + D \cdot 3h, \\
f = (x - x_0)^2 : \; 2(x - x_0)\Big|_{x=x_0} &= 0 = A \cdot 0 + B \cdot h^2 + C \cdot (2h)^2 + D \cdot (3h)^2, \\
f = (x - x_0)^3 : \; 3(x - x_0)^2\Big|_{x=x_0} &= 0 = A \cdot 0 + B \cdot h^3 + C \cdot (2h)^3 + D \cdot (3h)^3.
\end{aligned}$$

Zapišimo sistem v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in ga rešimo,

$$A = -\frac{11}{6h}, \; B = \frac{3}{h}, \; C = -\frac{3}{2h}, \; D = \frac{1}{3h}.$$

Zdaj si oglejmo še napako. V pravilo vstavimo $f = (x - x_0)^4$:

$$\begin{aligned}
4(x - x_0)^3\Big|_{x=x_0} = 0 &= A \cdot 0 + B \cdot h^4 + C \cdot (2h)^4 + D \cdot (3h)^4 + E \cdot 4!, \\
0 &= 3h^3 - 3 \cdot (2h)^3 + 1 \cdot (3h)^3 + 4!E, \\
-6h^3 &= 24E, \\
E &= -\frac{1}{4}h^3.
\end{aligned}$$

Vidimo še, da je $m = 4$, saj za polinome stopnje 4 pravilo ni več natančno. Pravilo je oblike

$$f'(x_0) = -\frac{11}{6h}\, y_0 + \frac{3}{h}\, y_1 - \frac{3}{2h}\, y_2 + \frac{1}{3h}\, y_3 - \frac{1}{4}h^3 f^{(4)}(\xi).$$

2. Izpeljite formulo za numerično odvajanje

$$f'(x_2) = Ay_0 + By_1 + Cy_2 + Dy_3 + Ey_4 + Ff^{(m)}(\xi).$$

Rešitev. Izberemo bazo $\{1, x - x_2, (x - x_2)^2, \ldots\}$ in bazne funkcije vstavimo v formulo,

$$\begin{aligned}
f = 1:&\ 0 = A + B + C + D + E,\\
f = x - x_2:&\ 1 = A \cdot (-2h) + B \cdot (-h) + D \cdot h + E \cdot 2h,\\
f = (x - x_2)^2:&\ 0 = A \cdot (-2h)^2 + B \cdot (-h)^2 + D \cdot h^2 + E \cdot (2h)^2,\\
f = (x - x_2)^3:&\ 0 = A \cdot (-2h)^3 + B \cdot (-h)^3 + D \cdot h^3 + E \cdot (2h)^3,\\
f = (x - x_2)^4:&\ 0 = A \cdot (-2h)^4 + B \cdot (-h)^4 + D \cdot h^4 + E \cdot (2h)^4.
\end{aligned}$$

Zapišimo sistem v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4\\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8\\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A\\ B\\ C\\ D\\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ \frac{1}{h}\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

in ga rešimo,

$$A = \frac{1}{12h},\ B = -\frac{2}{3h},\ C = 0,\ D = \frac{2}{3h},\ E = -\frac{1}{12h}.$$

Torej je $m \geq 5$. Zdaj si oglejmo še napako, v pravilo vstavimo $f = (x - x_2)^5$:

$$\begin{aligned}
0 &= A \cdot (-2h)^5 + B \cdot (-h)^5 + D \cdot h^5 + E \cdot (2h)^5 + F \cdot 5!,\\
-F \cdot 5! &= \frac{1}{12h}(-32h^5) + \left(-\frac{2}{3h}\right)(-h^5) + \frac{2}{3h}h^5 + \left(-\frac{1}{12h}\right)32h^5,\\
-F \cdot 5! &= -\frac{8}{3}h^4 + \frac{2}{3}h^4 + \frac{2}{3}h^4 - \frac{8}{3}h^4,\\
F &= \frac{h^4}{30}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je $m = 5$. Pravilo je oblike

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h}\,y_0 - \frac{2}{3h}\,y_1 + \frac{2}{3h}\,y_3 - \frac{1}{12h}\,y_4 + \frac{1}{30}h^4 f^{(5)}(\xi).$$

3. Odvod funkcije $f(x) = e^x$ v točki $x = 0$ računate numerično po pravilu

$$f'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{2h} - \frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(\xi).$$

Uporabite $x_0 = -h,\ x_1 = 0,\ x_2 = h,\ u = 2 \cdot 10^{-16}$ in določite optimalni h, pri katerem bo skupna napaka najmanjša.

Rešitev. Najprej ocenimo napako metode:

$$D_m = -\frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(\xi).$$

Vzeli bomo $h < 1$, zato lahko ocenimo,

$$|D_m| \leq \frac{h^2}{6} \max_{-h \leq x \leq h} \left| e^x \right| \leq \frac{eh^2}{6}.$$

Neodstranljivo napako ocenimo z

$$|D_n| \leq \frac{u+u}{2h} = \frac{u}{h},$$

kjer je $u = 2 \cdot 10^{-16}$ osnovna zaokrožitvena napaka. Ocena za skupno napako metode je torej

$$|D| \leq |D_m| + |D_n| \leq \frac{eh^2}{6} + \frac{u}{h}.$$

Optimalni h je minimum zgornje funkcije. Odvajamo,

$$\begin{aligned} \frac{e}{6} \cdot 2h - \frac{u}{h^2} &= 0, \\ \frac{e}{3}h^3 - u &= 0, \\ h^3 &= \frac{3u}{e}, \\ h &= \sqrt[3]{\frac{3u}{e}} \doteq 6 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

V spodnji tabeli so zapisani rezultati, ki jih vrne Octave:

h	$f'(0)$	skupna napaka
10^{-1}	1.001667500198441	-0.001667500198441
10^{-2}	1.000016666749992	-0.000016666749992
10^{-3}	1.000000166666681	-0.000000166666681
10^{-4}	1.000000001666890	-0.000000001666890
10^{-5}	1.000000000012103	-0.000000000012103
10^{-6}	0.999999999973245	0.000000000026755
10^{-7}	0.999999999473644	0.000000000526356
10^{-8}	0.999999993922529	0.000000006077471
10^{-9}	1.000000027229220	-0.000000027229220
10^{-10}	1.000000082740371	-0.000000082740371

Rezultati kažejo, da smo dobro ocenili optimalen h.

Poglavje 13

Numerična integracija

Numerično računamo vrednost integrala

$$Sf = \int_a^b f(x)dx.$$

Označimo

$$Sf = \underbrace{Ff}_{\text{približek za integral}} + \underbrace{Rf}_{\text{napaka}}.$$

Funkcijo f aproksimiramo z interpolacijskim polinomom p stopnje n v Lagrangeovi obliki in izpeljemo pravilo

$$Ff = \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i).$$

Koeficientom a_i pravimo *uteži*, vrednostim x_i pa *vozli* integracijske formule. Če vozle x_i izbiramo ekvidistantno, tj. tako da je med njimi vedno enaka razdalja, ki jo označimo s h, pravilu rečemo *Newton-Cotesovo pravilo.* V tem primeru velja $x_i = x_0 + i \cdot h$. Pri *zaprtem* pravilu uporabimo tudi vrednosti v robnih točkah x_0 in x_n, pri *odprtem* pa le vrednosti v notranjih vozlih.
Integracijsko pravilo je *reda m*, če je

$$Rx^j = 0,\ j = 0, 1, \ldots, m,\ Rx^{m+1} \neq 0,$$

torej če je napaka pravila enaka 0 za vse polinome stopnje $\leq m$.
Pri numeričnem integriranju pogosto računamo integrale oblike

$$\int_{x_0}^{x_n} (x - x_0)^k dx,$$

zato bomo izpeljali splošno pravilo za njihov izračun. V integral uvedemo novo spremenljivko $t = x - x_0$, $dt = dx$:

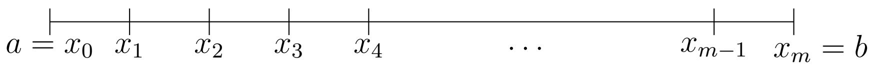
$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_n} (x - x_0)^k dx &= \int_0^{n\,h} t^k dt \\
&= \frac{1}{k+1}\, t^{k+1}\Big|_0^{n\,h} \\
&= \frac{1}{k+1}\,(n\,h)^{k+1}.
\end{aligned} \tag{13.1}$$

13.1 Sestavljena pravila

Sestavljeno pravilo dobimo tako, da interval $[a, b]$ ekvidistantno razdelimo na m podintervalov in na vsakem podintervalu uporabimo osnovno pravilo. Trapezno pravilo za integracijo je

$$Sf = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_1)\Big) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi),\ x_0 \le \xi \le x_1. \tag{13.2}$$

Pri izpeljavi sestavljenega trapeznega pravila na ekvidistantnih točkah $x_j = x_0 + jh$ si pomagamo s sliko 13.1.



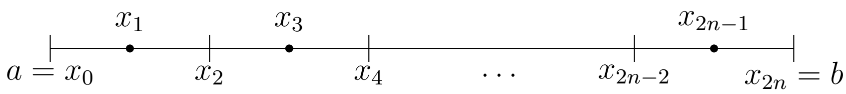
Slika 13.1: Izpeljava sestavljenega trapeznega pravila.

Sestavljeno trapezno pravilo je

$$\begin{aligned}
Sf &= T_h f + R_h f, \\
T_h f &= \sum_{j=1}^{m} \frac{h}{2}\Big(f(x_{j-1}) - f(x_j)\Big) \\
&= \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)\Big), \\
R_h f &= -\frac{1}{12}(b - a)h^2 f^{(2)}(\xi),\ a \le \xi \le b.
\end{aligned}$$

Osnovno Simpsonovo pravilo za integracijo je

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\Big) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [x_0, x_2],$$



Slika 13.2: Izpeljava sestavljenega pravila.

pri izpeljavi sestavljenega si pomagamo s sliko 13.2.
Sestavljeno Simpsonovo pravilo je

$$
\begin{aligned}
Sf = \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\Big) - \\
- \frac{h^4(x_{2n} - x_0)}{180} f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [x_0, x_{2n}]. \qquad (13.3)
\end{aligned}
$$

13.2 Rombergova ekstrapolacija

Natančnost trapeznega pravila lahko povečamo z Rombergovo ekstrapolacijo. Zapišimo trapezno pravilo za koraka h in $\frac{h}{2}$,

$$
\begin{aligned}
Sf &= T_h f + \sum_{k=1}^{\infty} c_k h^{2k}, \\
Sf &= T_{\frac{h}{2}} f + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{h}{2}\right)^{2k}.
\end{aligned}
$$

Opazimo, da v napaki lahko uničimo člen pri h^2. Drugo enačbo množimo s 4 in dobimo

$$
\begin{aligned}
4\,Sf &= 4\,T_{\frac{h}{2}} f + 4\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{h^{2k}}{2^{2k}} \\
&= 4\,T_{\frac{h}{2}} f + c_1 h^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \widetilde{c}_k h^{2k}, \\
4\,Sf - Sf &= 4\,T_{\frac{h}{2}} f - T_h f + \sum_{k=2}^{\infty} \widetilde{c}_{k,1} h^{2k}.
\end{aligned}
$$

Po enem koraku Rombergove ekstrapolacije torej dobimo

$$
Sf = \underbrace{\frac{4T_{\frac{h}{2}} f - T_h f}{3}}_{T^1_{\frac{h}{2}}} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k,1} h^{2k}
$$

in red napake je h^4. V splošnem velja

$$T^j_{h/2^r}f = \frac{2^{2j}\,T^{j-1}_{h/2^r}f - T^{j-1}_{h/(2^{r-1})}f}{2^{2j}-1}.$$

V tabeli 13.1 je zapisana shema dveh korakov Rombergove ekstrapolacije trapeznega pravila.

red napake / korak	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$
h	$T_h f$		
		$T^1_{\frac{h}{2}}f = \frac{1}{3}(4\,T_{\frac{h}{2}}f - T_h f)$	
$\frac{h}{2}$	$T_{\frac{h}{2}}f$		$T^2_{\frac{h}{4}}f = \frac{1}{15}(16\,T^1_{\frac{h}{4}}f - T^1_{\frac{h}{2}}f)$
		$T^1_{\frac{h}{4}}f = \frac{1}{3}(4\,T_{\frac{h}{4}}f - T_{\frac{h}{2}}f)$	
$\frac{h}{4}$	$T_{\frac{h}{4}}f$		

Tabela 13.1: Shema izračuna po Rombergovi ekstrapolaciji.

13.3 Monte Carlo integracija

Računamo integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$, kjer vemo, da za $x \in [a,b]$ velja $0 \leq f(x) \leq h$. Naj bo $V = (b-a)\,h$. Naključno izberemo N točk x_i iz domene $[a,b]$. Integral $I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{V}\int_a^b f(x)V\,dx$ lahko gledamo tudi kot matematično upanje funkcije $g(x) = f(x)V$ za slučajno spremenljivko x enakomerno porazdeljeno na domeni $[a,b]$.
Potem je

$$I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i) = V \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

približek za I.
To je ideja metode Monte-Carlo, ki jo lahko zelo preprosto posplošimo na več dimenzij in z njo na preprost način izračunamo približke za integral, kjer bi druge metode zahtevale več dela.

13.4 Naloge

1. Izpeljite zaprto Newton-Cotesovo pravilo na štirih točkah po metodi nedoločenih koeficientov. Vrednost prve uteži preverite še preko integracije Lagrangeevega baznega polinoma.

Rešitev. Pravilo bo oblike

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = Af(x_0)+Bf(x_1)+Cf(x_2)+Df(x_3)+Ef^{(m)}(\xi). \quad (13.4)$$

Izberemo bazo $\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, \dots\}$ in vstavimo bazne funkcije v pravilo, tako da bo točno za polinome čim višjih stopenj. Integrale izračunamo na dva načina. Pri prvem načinu uporabimo (13.1), pri drugem načinu pa upoštevamo, kakšno pravilo želimo dobiti, v tem primeru (13.4):

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_3} 1dx &= 3h, \\
\int_{x_0}^{x_3} 1dx &= A+B+C+D, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)dx &= \frac{1}{2}(3h)^2 = \frac{9}{2}h^2, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)dx &= A\cdot 0 + B\cdot h + C\cdot 2h + D\cdot 3h, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)^2dx &= \frac{1}{3}(3h)^3 = 9h^3, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)^2dx &= A\cdot 0 + B\cdot h^2 + C\cdot (2h)^2 + D\cdot (3h)^2, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)^3dx &= \frac{1}{4}(3h)^4 = \frac{81}{4}h^4, \\
\int_{x_0}^{x_3} (x-x_0)^3dx &= A\cdot 0 + B\cdot h^3 + C\cdot (2h)^3 + D\cdot (3h)^3.
\end{aligned}$$

Zapišimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
3h &= A+B+C+D, \\
\frac{9}{2}h &= B+2C+3D, \\
9h &= B+4C+9D, \\
\frac{81h}{4} &= B+8C+27D,
\end{aligned}$$

in ga rešimo

$$A = D = \frac{3}{8}h,\ B = C = \frac{9}{8}h.$$

Izračunajmo še napako,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_3}(x-x_0)^4dx &= \frac{1}{5}(3h)^5 = \frac{243h^5}{5},\\
\int_{x_0}^{x_3}(x-x_0)^4dx &= A\cdot 0 + B\cdot h^4 + C\cdot(2h)^4 + D\cdot(3h)^4 + E\cdot 4!,\\
\frac{243}{5}h^5 &= \frac{9}{8}h^5 + 16h^4\cdot\frac{9}{8}h + 81h^4\cdot\frac{3}{8}h + 24E,\\
E &= -\frac{3}{80}h^5.
\end{aligned}
$$

Pravilo je oblike

$$
\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3}{8}h\Big(f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\Big) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi).
$$

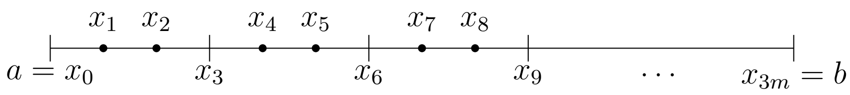
Preverimo še vrednost prve uteži,

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \int_{x_0}^{x_3}\ell_0(x)dx = \int_{x_0}^{x_3}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}dx\\
&= \int_{x_0}^{x_3}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)}dx\\
&= -\frac{1}{6h^3}\int_0^3(-h+th)(-2h+th)(-3h+th)h\,dt\\
&= -\frac{1}{6h^3}\,h^4\int_0^3(t-1)(t-2)(t-3)dt\\
&= -\frac{h}{6}\int_0^3(t^3-3t^2+2t-3t^2+9t-6)dt\\
&= -\frac{h}{6}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{6t^3}{3}+\frac{11t^2}{2}-6t\right]_0^3\\
&= \frac{3}{8}h.
\end{aligned}
$$

2. Izpeljite sestavljeno pravilo, ki ga dobite iz pravila, ki je rešitev naloge 1.

Rešitev. Narišimo skico intervala,

Sestavljeno pravilo dobimo tako, da na podintervalih $[x_{3i-3}, x_{3i}]$, $i =$



Slika 13.3: Izpeljava sestavljenega pravila.

$1, 2, \ldots, m$, uporabimo osnovno pravilo, torej

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{3i-3}}^{3i} f(x)dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{3}{8} h\Big(f(x_{3i-3}) + 3f(x_{3i-2}) + 3f(x_{3i-1}) + f(x_{3i})\Big) + \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \left(-\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi_i)\right)}_{\text{napaka } Rf}, \ \xi_i \in [x_{3i-3}, x_{3i}].
\end{aligned}$$

Ocenimo napako sestavljenega pravila,

$$\begin{aligned}
m \min_{a \le \xi \le b} f^{(4)}(\xi) \le \sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) &\le m \max_{a \le \xi \le b} f^{(4)}(\xi) \\
\Rightarrow \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f^{(4)}(\xi_i) &= f^{(4)}(\eta), \ \eta \in [a, b],
\end{aligned}$$

zato je

$$\begin{aligned}
Rf &= -\frac{3}{80} h^5 \cdot m f^{(4)}(\eta) \\
&= -\frac{3}{80} h^5 \cdot \frac{b-a}{3h} f^{(4)}(\eta) \\
&= -\frac{b-a}{80} h^4 f^{(4)}(\eta).
\end{aligned}$$

3. Določite konstante a, b, c, d, e in m v integracijskem pravilu

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\Big(af(x_0) + bf(x_1)\Big) + h^2\Big(cf'(x_0) + df'(x_1)\Big) + ef^{(m)}(\xi)$$

in izpeljite sestavljeno pravilo, ki ga iz tega pravila dobimo.

Rešitev. Izberemo bazo $\{1, x-x_0, (x-x_0)^2, \dots\}$ in bazne funkcije vstavimo v pravilo,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} 1 dx &= h, \\
\int_{x_0}^{x_1} 1 dx &= h(a+b), \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx &= \frac{h^2}{2}, \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h) + h^2(c\cdot 1 + d\cdot 1), \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^2 dx &= \frac{h^3}{3}, \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^2 dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h^2) + h^2(c\cdot 2\cdot 0 + d\cdot 2h), \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^3 dx &= \frac{h^4}{4}, \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^3 dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h^3) + h^2(c\cdot 3\cdot 0 + d\cdot 3h^2).
\end{aligned}
$$

Rešimo sistem

$$
\begin{aligned}
a+b &= 1, \\
b+c+d &= \frac{1}{2}, \\
b+2d &= \frac{1}{3}, \\
b+3d &= \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

in dobimo

$$
a = b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{12},\ d = -\frac{1}{12}.
$$

Izpeljimo še napako,

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^4 dx &= \frac{h^5}{5}, \\
\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)^4 dx &= h(a\cdot 0 + b\cdot h^4) + h^2(c\cdot 0 + d\cdot 4h^3) + e\cdot 4!, \\
\frac{h^5}{5} &= \frac{1}{2}h^5 + 4h^5\left(-\frac{1}{12}\right) + 24e, \\
h^5\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) &= 24e, \\
e &= \frac{1}{720}h^5.
\end{aligned}
$$

Osnovno pravilo je oblike

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{1}{2}h\Big(f(x_0)+f(x_1)\Big)+\frac{1}{12}h^2\Big(f'(x_0)-f'(x_1)\Big)+\frac{1}{720}h^5 f^{(4)}(\xi).$$

Izpeljimo še sestavljeno pravilo,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}h\Big(f(x_{i-1})+f(x_i)\Big)+\frac{1}{12}h^2\Big(f'(x_{i-1})-f'(x_i)\Big)\right)+\\ &+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{720}h^5 f^{(4)}(\xi_i),\ \xi_i\in[x_{i-1},x_i].\end{aligned}$$

Uporabimo $h=\frac{b-a}{m}$ in sestavljeno pravilo je

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}h\Big(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{m-1})+f(x_m)\Big)+\\ &+\frac{h^2}{12}\Big(f'(x_0)-f'(x_m)\Big)+\frac{1}{720}h^5 m f^{(4)}(\eta)\\ &= \frac{1}{2}h\Big(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{m-1})+f(x_m)\Big)+\\ &+\frac{h^2}{12}\Big(f'(x_0)-f'(x_m)\Big)+\frac{1}{720}h^4(b-a)f^{(4)}(\eta),\ \eta\in[a,b].\end{aligned}$$

4. Uporabite trapezno pravilo za izračun vrednosti integrala

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

in ocenite napako. Uporabite $h=1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.

Rešitev. Najprej rešimo za $h=1$. Uporabimo enačbo (13.2) za

$$x_0=0,\ x_1=1,\ f(x)=\frac{1}{1+x},$$

torej

$$\begin{aligned}T_1 f &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+1}\right)=\frac{3}{4}=0.75,\\ |Rf| &= \left|-\frac{1}{12}\cdot 1\cdot f''(\xi)\right|,\ 0\le\xi\le 1.\end{aligned}$$

Izračunajmo drugi odvod in ga ocenimo,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -(1+x)^{-2}, \\
f''(x) &= 2(1+x)^{-3}, \\
\max_{0\le x\le 1} |f''(x)| &= 2.
\end{aligned}$$

Torej je ocena za napako

$$|Rf| \le \frac{1}{12} \cdot 2 = \frac{1}{6} \doteq 0.166667.$$

Za $h = \frac{1}{2}$ uporabimo sestavljeno trapezno pravilo za

$$m = 2,\ h = \frac{1}{2},\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,$$

torej

$$\begin{aligned}
T_{\frac{1}{2}} f &= \frac{1}{2} T_1 f + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{17}{24} \doteq 0.708333, \\
|R_h f| &\le \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \\
&= \frac{1}{24} \doteq 0.0416667.
\end{aligned}$$

Za $h = \frac{1}{4}$ uporabimo sestavljeno trapezno pravilo za

$$m = 4,\ h = \frac{1}{4},\ x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1,$$

torej

$$\begin{aligned}
T_{\frac{1}{4}} f &= \frac{1}{2} T_{\frac{1}{2}} f + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1}{1+\frac{3}{4}} \right) \\
&= \frac{1171}{1680} \doteq 0.697024, \\
|Rf| &\le \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2 \\
&= \frac{1}{96} \doteq 0.0104167
\end{aligned}$$

Primerjajmo rezultate s točno rešitvijo 0.693147,

h	numerična rešitev	ocena napake	napaka
1	0.750000	0.1666667	-0.0568528
$\frac{1}{2}$	0.708333	0.0416667	-0.0151862
$\frac{1}{4}$	0.697024	0.0104167	-0.0038766

5. Z Rombergovo ekstrapolacijo trapezne metode izračunajte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$$

Naredite dva koraka, začetni korak naj bo $h = \frac{\pi}{4}$.

Rešitev. Najprej izračunajmo numerično vrednost integrala po trapeznem pravilu za $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}$,

$$\begin{aligned}
T_h f &= \frac{\pi}{8}\left(\sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 0.948059, \\
T_{\frac{h}{2}} f &= \frac{1}{2} T_h f + \frac{\pi}{8}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) = 0.987116, \\
T_{\frac{h}{4}} f &= \frac{1}{2} T_{\frac{h}{2}} f + \frac{\pi}{16}\left(\sin\frac{\pi}{16} + \sin\frac{3\pi}{16} + \sin\frac{5\pi}{16} + \sin\frac{7\pi}{16}\right) = 0.996785.
\end{aligned}$$

Dobljene vrednosti uporabimo v shemi Rombergove ekstrapolacije (tabela 13.1):

korak \ red napake	$\mathcal{O}(h^2)$	$\mathcal{O}(h^4)$	$\mathcal{O}(h^6)$
h	0.948059		
		1.00013	
$\frac{h}{2}$	0.987116		1
		1.00001	
$\frac{h}{4}$	0.996785		

Vidimo, da se vrednosti približujejo k točni vrednosti integrala, ki je 1.

6. Pokažite, da nam en korak Rombergove ekstrapolacije trapeznega pravila vrne Simpsonovo pravilo.

Rešitev. Zapišimo sestavljeno trapezno pravilo za koraka $2h$ in h

$$\begin{aligned}
T_{2h} f &= \frac{2h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\right), \\
T_h f &= \frac{1}{2} T_{2h} f + h\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}),
\end{aligned}$$

in naredimo korak Rombergove ekstrapolacije

$$\begin{aligned}
T_h^1 f &= \frac{4T_h f - T_{2h} f}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(2T_{2h} f + 4h \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) - T_{2h} f\right) \\
&= \frac{1}{3} h \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n}) + 4 \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1})\right),
\end{aligned}$$

kar je ravno sestavljeno Simpsonovo pravilo (enačba (13.3)).

7. S pomočjo Monte-Carlo metode izračunajte integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy\, dz}{1 + x + 2y + 3z}.$$

Za N vzemite 1000, 5000, 10000.

Rešitev. Uporabimo program `monteCarlo` ([1]) in v Octaveu z ukazi `monteCarlo(1000)`, `monteCarlo(5000)` in `monteCarlo(10000)` dobimo približke,

$N = 1000$	$N = 5000$	$N = 10000$
0.2722	0.2729	0.2716
0.2755	0.2741	0.2724
0.2730	0.2716	0.2720
0.2724	0.2746	0.2726
0.2719	0.2714	0.2724

ki so blizu točni vrednosti integrala 0.272534. Da dobimo več približkov, ukaze uporabimo večkrat.

Poglavje 14

Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb

14.1 Začetni problemi - enokoračne metode

Rešujemo navadno diferencialno enačbo prvega reda

$$y' = f(x, y),\ a \leq x \leq b,\ y(a) = \alpha.$$

Interval ekvidistantno razdelimo na n delov in vpeljemo oznake

$$x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \dots, n,\ y_i \approx y(x_i).$$

Eksplicitna Eulerjeva metoda za reševanje navadnih diferencialnih enačb je

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{14.1}$$

Implicitna Eulerjeva metoda za reševanje navadnih diferencialnih enačb je

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}),\ i = 0, 1, \dots, n-1. \tag{14.2}$$

Začetne probleme lahko rešujemo z *razvojem v Taylorjevo vrsto.* Razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 4 je enak

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(\xi), \tag{14.3}$$

kjer je $\xi \in [x, x+h]$. Uporabimo izražave

$$y' = f, \quad y'' = f_x + f_y f, \dots$$

v (14.3). Funkcije izračunamo v x_i. Približek za rešitev diferencialne enačbe dobimo kot

$$y_{i+1} = y_i + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{3!}y''' + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}. \tag{14.4}$$

Runge-Kutta metoda reda 4 je oblike

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\Big(x_i, y_i\Big),\\
k_2 &= hf\Big(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\Big),\\
k_3 &= hf\Big(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\Big),\\
k_4 &= hf\Big(x_i + h, y_i + k_3\Big),\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}\Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big).
\end{aligned} \tag{14.5}$$

14.2 Začetni problemi - večkoračne metode

Zaradi lažjega pisanja označimo $f_i = f(x_i, y_i)$. *Adams-Bashforthova metoda 4. reda* je štirikoračna metoda oblike

$$\begin{aligned}
y_0 = \alpha_0,\ y_1 &= \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2,\ y_3 = \alpha_3,\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}\Big(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\Big).
\end{aligned} \tag{14.6}$$

Adams-Moultonova metoda reda 4 pa je trikoračna metoda oblike

$$\begin{aligned}
y_0 = \alpha_0,\ y_1 &= \alpha_1,\ y_2 = \alpha_2,\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}\Big(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\Big).
\end{aligned}$$

Milneova prediktor-korektor metoda je oblike

$$\begin{aligned}
y_i^{(P)} &= y_{i-4} + \frac{4h}{3}\Big(2f_{i-1} - f_{i-2} + 2f_{i-3}\Big),\\
y_i^{(K)} &= y_{i-2} + \frac{h}{3}\Big(f_i^{(P)} + 4f_{i-1} + f_{i-2}\Big),
\end{aligned} \tag{14.7}$$

kjer je $f_i^{(P)} = f\Big(x_i, y_i^{(P)}\Big)$.

14.3 Enačbe višjega reda

Enačbo drugega reda oblike

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(a) = \alpha,\ y'(a) = \beta,$$

prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{aligned} y' = z,\ y'' = z' = f(x, y, z), \\ y(a) = \alpha,\ z(a) = \beta, \end{aligned}$$

ki ga lahko zapišemo v vektorski obliki

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = F\left(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right),\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

kjer je

$$F\left(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ f(x, y, z) \end{bmatrix} \text{ in } y_0 = y(a), z_0 = z(a).$$

Sistem nato rešujemo npr. z Runge-Kutta metodo reda 4

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0 + \frac{1}{2}h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0 + \frac{1}{2}h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} &= hF\big(x_0 + h, \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix}\big), \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

14.4 Robni problemi

Pri *diferenčni metodi* odvode zamenjamo z diferencami, tj. z aproksimacijami za odvod. Interval $[a, b]$, na katerem iščemo rešitev diferencialne enačbe, razdelimo na n delov, torej

$$x_0 = a,\ x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n,\ h = \frac{b - a}{n}.$$

Prvi odvod aproksimiramo z

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

drugega pa z

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

S *strelsko metodo* rešujemo robni problem oblike

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(a) &= \alpha, \ y(b) = \beta. \end{aligned}$$

Problem prevedemo na reševanje začetnega problema

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(a) &= \alpha, \ y'(a) = v, \end{aligned}$$

katerega rešitev je funkcija $y(x, v)$. Iščemo tak v^*, da je $y(b, v^*) = \beta$. Iščemo torej ničlo funkcije

$$E(v) = y(b, v) - \beta.$$

14.5 Naloge

1. Uporabite eksplicitno in implicitno Eulerjevo metodo pri reševanju začetnega problema

   $$y' = y - x^2 + 1, \ 0 \le x \le 2, \ y(0) = 0.5.$$

   Uporabite $h = 0.2$ in določite približek za $y(0.4)$.

   Rešitev. Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.2\,i$ in dobimo

   $$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(y_i - x_i^2 + 1) \\ &= y_i + 0.2(y_i - 0.04\,i^2 + 1) \\ &= 1.2\,y_i - 0.008\,i^2 + 0.2. \end{aligned}$$

   Iščemo y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

   $$\begin{aligned} y_1 &= 1.2 \cdot 0.5 - 0.008 \cdot 0 + 0.2 = 0.8, \\ y_2 &= 1.2 \cdot 0.8 - 0.008 \cdot 1 + 0.2 = 1.152. \end{aligned}$$

   Iskani približek je torej $y(0.4) \doteq 1.152$.

Zdaj uporabimo še implicitno Eulerjevo metodo (enačba (14.2)),

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(y_{i+1} - x_{i+1}^2 + 1) \\ &= y_i + 0.2(y_{i+1} - 0.04(i+1)^2 + 1) \\ y_{i+1} &= \frac{1}{0.8}(y_i - 0.008(i+1)^2 + 0.2). \end{aligned}$$

Iščemo y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.865, \\ y_2 &= 1.29125. \end{aligned}$$

Iskani približek je torej $y(0.4) \doteq 1.29125$.

2. Uporabite eksplicitno Eulerjevo metodo za numerično reševanje naslednjih začetnih problemov:

   (a)
   $$y' = xe^{3x} - 2y,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ h = 0.5.$$

   (b) Narišite približek za rešitev diferencialne enačbe
   $$y' = 1 + (x-y)^2,\ 2 \le x \le 3,\ y(2) = 1,\ h = 0.5.$$

   (c)
   $$y' = 1 + \frac{y}{x},\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 2,\ h = 0.25.$$

   (d)
   $$y' = \cos 2x + \sin 3x,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 1,\ h = 0.25.$$

   (e) Zapišite približka y_1 in y_2 pri reševanju
   $$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 1,\ h = 0.1.$$

   (f) Zapišite približka y_1 in y_2 pri reševanju
   $$y' = -(y+1)(y+3),\ 0 \le x \le 2,\ y(0) = -2,\ h = 0.2.$$

   (g) Zapišite približka y_1 in y_2 pri reševanju
   $$y' = -5y + 5x^2 + 2x,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = \frac{1}{3},\ h = 0.1.$$

Rešitev.

(a) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.5i$ in dobimo

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h(x_i e^{3x_i} - 2y_i) \\ &= y_i + 0.5(x_i e^{3x_i} - 2y_i) \\ &= 0.5 x_i e^{3x_i}. \end{aligned}$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

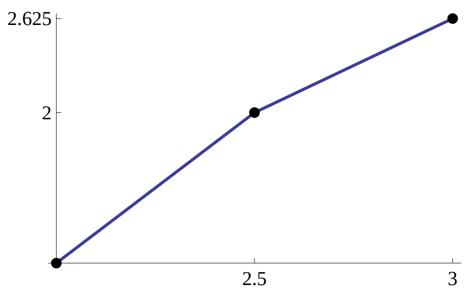
$$\begin{aligned} y_1 &= 0.5 \cdot 0 = 0, \\ y_2 &= 0.5 \cdot 0.5 \cdot e^{1.5} = 1.120. \end{aligned}$$

(b) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 2 + 0.5i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.5 \cdot (1 + (x_i - y_i)^2).$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + 0.5 \cdot (1 + (2-1)^2) = 2, \\ y_2 &= 2 + 0.5 \cdot (1 + (2.5-2)^2) = 2.625. \end{aligned}$$



Slika 14.1: Numerična rešitev enačbe.

(c) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 1 + 0.25i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{y_i}{x_i}\right).$$

Iščemo y_1, y_2, y_3, y_4. Štirikrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{2}{1}\right) = 2.75, \\ y_2 &= 2.75 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{2.75}{1.25}\right) = 3.55, \\ y_3 &= 3.55 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{3.55}{1.5}\right) = 4.3917, \\ y_4 &= 4.3917 + 0.25 \cdot \left(1 + \frac{4.3917}{1.75}\right) = 5.2690. \end{aligned}$$

(d) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.25i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.25 \cdot (\cos 2x_i + \sin 3x_i).$$

Iščemo y_1, y_2, y_3, y_4. Štirikrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + 0.25 \cdot (\cos 0 + \sin 0) = 1.25, \\
y_2 &= 1.25 + 0.25 \cdot (\cos 0.5 + \sin 0.75) = 1.63981, \\
y_3 &= 1.63981 + 0.25 \cdot (\cos 1 + \sin 1.5) = 2.02426, \\
y_4 &= 2.02426 + 0.25 \cdot (\cos 1.5 + \sin 2.25) = 2.23646.
\end{aligned}$$

(e) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 1 + 0.1i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot \left(\frac{y_i}{x_i} - \left(\frac{y_i}{x_i} \right)^2 \right).$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + 0.1 \cdot \left(\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{1} \right)^2 \right) = 1, \\
y_2 &= 1 + 0.1 \cdot \left(\frac{1}{1.1} - \left(\frac{1}{1.1} \right)^2 \right) = 1.0083.
\end{aligned}$$

(f) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.2i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.2 \cdot (-(y_i + 1)(y_i + 3)).$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= -2 - 0.2 \cdot (-2 + 1)(-2 + 3) = -1.8, \\
y_2 &= -1.8 - 0.2 \cdot (-1.8 + 1)(-1.8 + 3) = -1.608.
\end{aligned}$$

(g) Uporabimo enačbo (14.1) in $x_i = 0.1i$ in dobimo

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot (-5y_i + 5x_i^2 + 2x_i)$$

Iščemo y_1 in y_2. Dvakrat uporabimo zgornjo enačbo

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{3} + 0.1 \cdot (-5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = \frac{1}{6}, \\
y_2 &= \frac{1}{6} + 0.1 \cdot (-5 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot 0.01 + 2 \cdot 0.1) = 0.108333.
\end{aligned}$$

3. S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto do reda 4 poiščite numerično rešitev $y_1 \approx y(0.1)$ enačbe

$$y' = x^2 + y^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ y(0) = 1.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo odvode in njihove vrednosti,

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2 \Rightarrow y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1, \\ y'' &= 2x + 2yy' \Rightarrow y''(0) = 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \\ y''' &= 2 + 2(y')^2 + 2yy'' \Rightarrow y'''(0) = 2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8, \\ y^{(4)} &= 6y'y'' + 2yy''' \Rightarrow y^{(4)}(0) = 6 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 8 = 28. \end{aligned}$$

Zdaj upoštevajmo $h = 0.1$ in $y(0) = 1$ in vstavimo v enačbo (14.4)

$$y_1 = 1 + 0.1 \cdot 1 + \frac{0.1^2}{2} \cdot 2 + \frac{0.1^3}{3!} \cdot 8 + \frac{0.1^4}{4!} \cdot 28 = 1.11145.$$

4. Uporabite razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 3 za reševanje začetnega problema

$$y' = y - x^2 + 1,\ 0 \leq x \leq 2,\ y(0) = 0.5,\ h = 0.25.$$

Poiščite približek za $y(0.5)$.

Rešitev. Najprej izračunajmo odvode in njihove vrednosti v $x = 0$,

$$\begin{aligned} y' &= y - x^2 + 1 \Rightarrow y'(0) = 0.5 - 0^2 + 1 = 1.5, \\ y'' &= y' - 2x \Rightarrow y''(0) = 1.5 - 2 \cdot 0 = 1.5, \\ y''' &= y'' - 2 \Rightarrow y'''(0) = 1.5 - 2 = -0.5. \end{aligned}$$

Zdaj upoštevajmo $h = 0.25$ in $y(0) = 0.5$ in vstavimo v enačbo (14.4) (do reda 3)

$$y_1 = 0.5 + 0.25 \cdot 1.5 + \frac{0.25^2}{2} \cdot 1.5 + \frac{0.25^3}{3!} \cdot (-0.5) = 0.9205729.$$

Iščemo približek za $y(0.5)$, torej y_2. Izračunajmo približke za vrednosti odvodov v $x = 0.25$,

$$\begin{aligned} y'(0.25) &= 0.9205729 - 0.25^2 + 1 = 1.8580729, \\ y''(0.25) &= 1.8580729 - 2 \cdot 0.25 = 1.3580729, \\ y'''(0.25) &= 1.3580729 - 2 = -0.641927. \end{aligned}$$

Rezultate vstavimo v enačbo (14.4) (do reda 3) in dobimo iskani približek

$$y_2 = 0.9205729 + 0.25 \cdot 1.8580729 + \frac{0.25^2}{2} \cdot 1.3580729 + \frac{0.25^3}{3!} \cdot (-0.641927)$$
$$= 1.425859.$$

5. Za reševanje enačb iz naloge 2 uporabite razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 3. Poiščite približek za y_1.

   Rešitev. Uporabimo enak postopek kot v nalogi 4.

   (a) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$\begin{aligned} y' &= xe^{3x} - 2y \Rightarrow y'(0) = 0, \\ y'' &= e^{3x} + 3xe^{3x} - 2y' \Rightarrow y''(0) = 1, \\ y''' &= 6e^{3x} + 9xe^{3x} - 2y'' \Rightarrow y'''(0) = 4. \end{aligned}$$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.2083333$.

   (b) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$\begin{aligned} y' &= 1 + (x-y)^2 \Rightarrow y'(2) = 2, \\ y'' &= 2(x-y)(1-y') \Rightarrow y''(2) = -2, \\ y''' &= 2(1-y')^2 + 2(x-y)(-y'') \Rightarrow y'''(2) = 6. \end{aligned}$$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.875$.

   (c) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$\begin{aligned} y' &= 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow y'(1) = 3, \\ y'' &= \frac{y'x - y}{x^2} \Rightarrow y''(1) = 1, \\ y''' &= \frac{x^2y'' - 2(xy' - y)}{x^3} \Rightarrow y'''(1) = -1. \end{aligned}$$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 2.7786458$.

   (d) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

   $$\begin{aligned} y' &= \cos 2x + \sin 3x \Rightarrow y'(0) = 1, \\ y'' &= -2\sin 2x + 3\cos 3x \Rightarrow y''(0) = 3, \\ y''' &= -4\cos 2x - 9\sin 3x \Rightarrow y'''(0) = -4. \end{aligned}$$

   Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.333333$.

(e) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Rightarrow y'(1) = 0,\\
y'' &= \frac{y'x - y}{x^2} - \frac{2y(y'x - y)}{x^3} \Rightarrow y''(1) = 1,\\
y''' &= \frac{y''x^2 - 2x(y'x - y)}{x^4} -\\
&- \frac{(2y'(y'x - y) + 2yy'')x^3 - 2y(y'x - y) \cdot 3x^2}{x^6} \Rightarrow y'''(1) = -5.
\end{aligned}
$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.004167$.

(f) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$
\begin{aligned}
y' &= -(y+1)(y+3) \Rightarrow y'(0) = 1,\\
y'' &= -y'(2y+4) \Rightarrow y''(0) = 0,\\
y''' &= -y''(2y+4) - 2(y')^2 \Rightarrow y'''(0) = -2.
\end{aligned}
$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = -1.80267$.

(g) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$
\begin{aligned}
y' &= -5y + 5x^2 + 2x \Rightarrow y'(0) = -\frac{5}{3},\\
y'' &= -5y' + 10x + 2 \Rightarrow y''(0) = \frac{31}{3},\\
y''' &= -5y'' + 10 \Rightarrow y'''(0) = -\frac{125}{3}.
\end{aligned}
$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.2113889$.

6. Uporabite razvoj v Taylorjevo vrsto do reda 3 in poiščite numerično rešitev naslednjih enačb v točki x_1:

(a)
$$y' = \sin x + e^{-x},\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ h = 0.5.$$

(b)
$$y' = \frac{1}{x}\left(y^2 + y\right),\ 1 \le x \le 3,\ y(1) = -2,\ h = 0.5.$$

(c)
$$y' = -xy + \frac{4x}{y},\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 1,\ h = 0.25.$$

(d)
$$y' = 1 + x\sin(xy),\ 0 \le x \le 2,\ y(0) = 0,\ h = 0.5.$$
(e)
$$y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 0,\ h = 0.1.$$

Rešitev. Uporabimo enak postopek kot v nalogi 4.

(a) Izračunamo odvode in njihove vrednosti
$$\begin{aligned} y' &= \sin x + e^{-x} \Rightarrow y'(0) = 1, \\ y'' &= \cos x - e^{-x} \Rightarrow y''(0) = 0, \\ y''' &= -\sin x + e^{-x} \Rightarrow y'''(0) = 1. \end{aligned}$$
Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.5208333$.

(b) Izračunamo odvode in njihove vrednosti
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x}\left(y^2 + y\right) \Rightarrow y'(1) = 2, \\ y'' &= -\frac{1}{x^2}\left(y^2 + y\right) + \frac{1}{x}\left(2yy' + y'\right) \Rightarrow y''(1) = -8, \\ y''' &= \frac{2}{x^3}\left(y^2 + y\right) - \frac{2}{x^2}\left(2yy' + y'\right) + \\ &\quad + \frac{1}{x}\left(2(y')^2 + 2yy'' + y''\right) \Rightarrow y'''(1) = 48. \end{aligned}$$
Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = -1$.

(c) Izračunamo odvode in njihove vrednosti
$$\begin{aligned} y' &= -xy + \frac{4x}{y} \Rightarrow y'(0) = 0, \\ y'' &= -y - xy' + \frac{4y - 4xy'}{y^2} \Rightarrow y''(0) = 3, \\ y''' &= -2y' - xy'' + \frac{-4xy''y - (4y - 4xy') \cdot 2y'}{y^3} \Rightarrow y'''(0) = 0. \end{aligned}$$
Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 1.09375$.

(d) Izračunamo odvode in njihove vrednosti
$$\begin{aligned} y' &= 1 + x\sin(xy) \Rightarrow y'(0) = 1, \\ y'' &= \sin(xy) + x\cos(xy)(y + xy') \Rightarrow y''(0) = 0, \\ y''' &= 2\cos(xy)(y + xy') - x\sin(xy)(y + xy')^2 + x\cos(xy)(2y' + xy'') \\ &\Rightarrow y'''(0) = 0. \end{aligned}$$
Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.5$.

(e) Izračunamo odvode in njihove vrednosti

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2}{x}y + x^2e^x \Rightarrow y'(1) = e,\\
y'' &= -\frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x}y' + (2x + x^2)e^x \Rightarrow y''(1) = 5e,\\
y''' &= \frac{4}{x^3}y - \frac{4}{x^2}y' + \frac{2}{x}y'' + (2 + 4x + x^2)e^x \Rightarrow y'''(1) = 13e.
\end{aligned}$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.4) in dobimo približek $y_1 = 0.345675$.

7. Za reševanje enačb iz naloge 2 uporabite Runge-Kutta metodo reda 4. Izračunajte y_1.

Rešitev.

(a) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.5f(0,0) = 0.5(0-0) = 0,\\
k_2 &= 0.5f(0.25,0) = 0.5(0.25e^{3\cdot 0.25} - 0) = 0.264625,\\
k_3 &= 0.5f(0.25, 0.264625/2) = 0.5(0.25e^{3\cdot 0.25} - 2\cdot 0.132313) =\\
&= 0.132312,\\
k_4 &= 0.5f(0.5, 0.132312) = 0.5(0.5e^{3\cdot 0.5} - 2\cdot 0.132312) = 0.98811,\\
y_1 &= 0 + \frac{1}{6}(0 + 2\cdot 0.264625 + 2\cdot 0.132313 + 0.98811) = 0.296997.
\end{aligned}$$

(b) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.5f(2,1) = 0.5(1 + (2-1)^2) = 1,\\
k_2 &= 0.5f(2.25, 1.5) = 0.5(1 + (2.25 - 1.5)^2) = 0.78125,\\
k_3 &= 0.5f(2.25, 1.39063) = 0.5(1 + (2.25 - 1.39063)^2) = 0.869263,\\
k_4 &= 0.5f(2.5, 1.86926) = 0.5(1 + (2.5 - 1.86926)^2) = 0.698915,\\
y_1 &= 1 + \frac{1}{6}(1 + 2\cdot 0.78125 + 2\cdot 0.869263 + 0.698915) = 1.83332.
\end{aligned}$$

(c) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0.75,\\
k_2 &= 0.777778,\\
k_3 &= 0.780864,\\
k_4 &= 0.806173,\\
y_1 &= 2.77891.
\end{aligned}$$

(d) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0.25,\\
k_2 &= 0.333796,\\
k_3 &= 0.333796,\\
k_4 &= 0.389805,\\
y_1 &= 1.32917.
\end{aligned}
$$

(e) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,\\
k_2 &= 0.00453515,\\
k_3 &= 0.00433929,\\
k_4 &= 0.00794015,\\
y_1 &= 1.00428.
\end{aligned}
$$

(f) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0.2,\\
k_2 &= 0.198,\\
k_3 &= 0.19804,\\
k_4 &= 0.192156,\\
y_1 &= -1.80263.
\end{aligned}
$$

(g) Uporabimo sistem (14.5) in dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -0.166667,\\
k_2 &= -0.11375,\\
k_3 &= -0.126979,\\
k_4 &= -0.0781771,\\
y_1 &= 0.212283.
\end{aligned}
$$

8. Z Adams-Bashforthovo metodo reda 4 poiščite numerični približek za $y(2)$, kjer je $y(x)$ rešitev enačbe

$$y' = y - x^2 + 1,\ 0 \leq x \leq 2,\ y(0) = 0.5,$$

in $h = 0.5$.

Rešitev. Najprej uporabimo Runge-Kutta metodo reda 4, da dobimo 4 začetne približke, ki jih potrebujemo pri Adams-Bashforthovi metodi,

$$y_0 = 0.5,\ y_1 = 1.42513,\ y_2 = 2.6396,\ y_3 = 4.00681.$$

Zdaj uporabimo enačbo (14.6) in dobimo približek

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + \frac{0.5}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \\ &= 4.00681 + \frac{0.5}{24}(55 \cdot 2.75681 - 59 \cdot 2.6396 + 37 \cdot 2.17513 - 9 \cdot 1.5) \\ &= 5.31657. \end{aligned}$$

9. Uporabite Milneovo prediktor-korektor metodo za reševanje začetnega problema
$$y' = -xy^2,\ y(0) = 2,$$
in poiščite numerični približek za y_4, če je $h = 0.2$.

Rešitev. Najprej uporabimo Runge-Kutta metodo reda 4, da dobimo začetne približke, ki jih potrebujemo za Milneovo metodo,

$$y_0 = 2,\ y_1 = 1.92307,\ y_2 = 1.72411,\ y_3 = 1.47056.$$

Zdaj uporabimo prediktor iz metode (14.7)

$$y_4^{(P)} = y_0 + \frac{4h}{3}(2f_3 - f_2 + 2f_1) = 1.23058.$$

Izračunano vrednost uporabimo v korektorju in dobimo

$$y_4^{(K)} = y_2 + \frac{h}{3}(f_4^{(P)} + 4f_3 + f_2) = 1.21807.$$

10. Prevedite reševanje začetnega problema

$$y'' - y'y^2 + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

na reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb prvega reda in uporabite Runge-Kutta metodo reda 4 za izračun y_1, če je $h = 0.2$.

Rešitev. Zapišimo enačbo v obliki sistema diferencialnih enačb prvega reda
$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ zy^2 - y \end{bmatrix} = F(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}),\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 \\ z_0 y_0^2 - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 + \frac{1}{2}\ell_1 \\ (z_0 + \frac{1}{2}\ell_1)(y_0 + \frac{1}{2}k_1)^2 - (y_0 + \frac{1}{2}k_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02 \\ -0.22 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 + \frac{1}{2}\ell_2 \\ (z_0 + \frac{1}{2}\ell_2)(y_0 + \frac{1}{2}k_2)^2 - (y_0 + \frac{1}{2}k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.022 \\ -0.219562 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} z_0 + \ell_3 \\ (z_0 + \ell_3)(y_0 + k_3)^2 - (y_0 + k_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0439124 \\ -0.237602 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.978681 \\ -0.219454 \end{bmatrix}.$$

Približek za vrednost rešitve v točki 0.2 je $y_1 = 0.978681$.

11. Prevedite reševanje začetnega problema

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x}\sin x,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = -0.4,\ y'(0) = -0.6$$

na reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb prvega reda in uporabite Runge-Kutta metodo reda 4 za izračun y_1 pri $h = 0.1$.

Rešitev. Zapišimo enačbo v obliki sistema diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ 2z - 2y + e^{2x}\sin x \end{bmatrix} = F(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}),\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ -0.6 \end{bmatrix}.$$

Sistem rešimo z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.06 \\ -0.04 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.062 \\ -0.032476 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0616238 \\ -0.0315241 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.063152 \\ -0.021786 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_2 \\ \ell_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} k_3 \\ \ell_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} k_4 \\ \ell_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4617333 \\ -0.6316312 \end{bmatrix}.$$

12. Z diferenčno metodo za $h = \frac{1}{2}$ rešite robni problem

$$\begin{aligned}(1+x^2)y'' + 2xy' - x^2y &= 1,\\ y(-1) = y(1) &= 0.\end{aligned}$$

Rešitev. Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$(1+x_i^2)\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + 2x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - x_i^2 y_i = 1. \tag{14.8}$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned}y_{i-1}(1+x_i^2 - x_ih) + y_i(-2(1+x_i^2) - h^2x_i^2) + y_{i+1}(1+x_i^2+x_ih) = h^2,\\ y_0 = 0,\ y_n = 0.\end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -2(1+x_1^2) - h^2x_1^2 & 1+x_1^2+x_1h & & \\ 1+x_2^2-x_2h & -2(1+x_2^2) - h^2x_2^2 & 1+x_2^2+x_2h & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+x_{n-2}^2+x_{n-2}h \\ & 1+x_{n-1}^2 - x_{n-1}h & -2(1+x_{n-1}^2) - h^2x_{n-1}^2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1\ y_2\ \dots\ y_{n-1}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h^2\ h^2\ \dots\ h^2\end{bmatrix}^T.$$

V našem primeru je $h = \frac{1}{2},\ x_i = -1+ih,\ i = 0,1,2,3,4$, torej rešujemo sistem

$$\begin{bmatrix} -\frac{41}{16} & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \\ & 1 & -\frac{41}{16}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Rešitev je

$$[y_1, y_2, y_3]^T = [-0.24, -0.365, -0.24]^T.$$

13. Sestavite sistem linearnih enačb za reševanje robnega problema z diferenčno metodo pri danem koraku h :

(a)

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2},\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = 1,\ y(2) = 2$$

(b)

$$y'' = 4(y - x),\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2$$

(c)

$$y'' = y' + 2y + \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ y(0) = -0.3,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

(d)

$$y'' = -3y' + 2y + 2x + 3,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 2,\ y(1) = 1$$

(e)

$$y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y - \frac{2}{x^2}\ln x,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = \ln 2$$

(f)

$$y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x},\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = -1,\ y(1) = 0$$

(g)

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{3}{x^2}y + \frac{\ln x}{x} - 1,\ 1 \le x \le 2,\ y(1) = y(2) = 0$$

Rešitev.

(a) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -\frac{2}{x_i}\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \frac{2}{x_i^2}y_i + \frac{\sin(\ln x_i)}{x_i^2}.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} x_i^2(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) &= -hx_i(y_{i+1} - y_{i-1}) + 2h^2 y_i + h^2 \sin(\ln x_i), \\ y_{i-1}(x_i^2 - hx_i) + y_i(-2x_i^2 - 2h^2) + y_{i+1}(x_i^2 + hx_i) &= h^2 \sin(\ln x_i), \\ y_0 = 1,\ y_n &= 2. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -2x_1^2 - 2h^2 & x_1^2 + hx_1 & & \\ x_2^2 - hx_2 & -2x_2^2 - 2h^2 & x_2^2 + hx_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & x_{n-2}^2 + hx_{n-2} \\ & & x_{n-1}^2 - hx_{n-1} & -2x_{n-1}^2 - 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 \sin(\ln x_1) - (x_1^2 - hx_1) \\ h^2 \sin(\ln x_2) \\ \vdots \\ h^2 \sin(\ln x_{n-2}) \\ h^2 \sin(\ln x_{n-1}) - 2(x_{n-1}^2 + hx_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

(b) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 4(y_i - x_i).$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} y_{i-1} + y_i(-2 - 4h^2) + y_{i+1} &= -4h^2 x_i, \\ y_0 = 0, y_n &= 2. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -2-4h^2 & 1 & & \\ 1 & -2-4h^2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2-4h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4h^2 x_1 \\ -4h^2 x_2 \\ \vdots \\ -4h^2 x_{n-2} \\ -4h^2 x_{n-1} - 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i + \cos x_i.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} y_{i-1}(2+h) + y_i(-4 - 4h^2) + y_{i+1}(2-h) &= 2h^2 \cos x_i, \\ y_0 = -0.3, \quad y_n &= -0.1. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -4-4h^2 & 2-h & & \\ 2+h & -4-4h^2 & 2-h & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 2-h \\ & & & 2+h & -4-4h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2h^2 \cos x_1 + 0.3(2+h) \\ 2h^2 \cos x_2 \\ \vdots \\ 2h^2 \cos x_{n-2} \\ 2h^2 \cos x_{n-1} + 0.1(2-h) \end{bmatrix}.$$

(d) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = -3\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + 2y_i + 2x_i + 3.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$y_{i-1}(2-3h) + y_i(-4-4h^2) + y_{i+1}(2+3h) = 4h^2x_i + 6h^2,$$
$$y_0 = 2, \quad y_n = 1.$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -4-4h^2 & 2+3h & & & \\ 2-3h & -4-4h^2 & 2+3h & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2+3h \\ & & & 2-3h & -4-4h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4h^2x_1 + 6h^2 - 2(2-3h) \\ 4h^2x_2 + 6h^2 \\ \vdots \\ 4h^2x_{n-2} + 6h^2 \\ 4h^2x_{n-1} + 6h^2 - (2+3h) \end{bmatrix}.$$

(e) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = -\frac{4}{x_i}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + \frac{2}{x_i^2}y_i - \frac{2}{x_i^2}\ln x_i.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$y_{i-1}(x_i^2 - 2x_ih) + y_i(-2x_i^2 - 2h^2) + y_{i+1}(x_i^2 + 2x_ih) = -2h^2 \ln x_i,$$
$$y_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_n = \ln 2.$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -2x_1^2 - 2h^2 & x_1^2 + 2x_1h & & & \\ x_2^2 - 2x_2h & -2x_2^2 - 2h^2 & x_2^2 + 2x_2h & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & x_{n-2}^2 + 2x_{n-2}h \\ & & & x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}h & -2x_{n-1}^2 - 2h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -2h^2 \ln x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1h) \\ -2h^2 \ln x_2 \\ \vdots \\ -2h^2 \ln x_{n-2} \\ -2h^2 \ln x_{n-1} - \ln 2(x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}h) \end{bmatrix}.$$

(f) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = -(x_i+1)\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + 2y_i + (1-x_i^2)e^{-x_i}.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} y_{i-1}(2-h(x_i+1)) + y_i(-4-4h^2) + y_{i+1}(2+h(x_i+1)) = \\ = 2h^2(1-x_i^2)e^{-x_i}, \\ y_0 = -1, \quad y_n = 0. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -4-4h^2 & 2+h(x_1+1) & & \\ 2-h(x_2+1) & -4-4h^2 & 2+h(x_2+1) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2+h(x_{n-2}+1) \\ & 2-h(x_{n-1}+1) & & -4-4h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h^2(1-x_1^2)e^{-x_1} + 2 - h(x_1+1) \\ 2h^2(1-x_2^2)e^{-x_2} \\ \vdots \\ 2h^2(1-x_{n-2}^2)e^{-x_{n-2}} \\ 2h^2(1-x_{n-1}^2)e^{-x_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

(g) Zapišimo diferencialno enačbo z aproksimacijami odvodov,

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{x_i}\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} + \frac{3}{x_i^2}y_i + \frac{\ln x_i}{x_i} - 1.$$

Zdaj jo poenostavimo in zapišemo robne pogoje

$$\begin{aligned} y_{i-1}(2x_i^2 + x_i h) + y_i(-4x_i^2 - 6h^2) + y_{i+1}(2x_i^2 - x_i h) = \\ = 2h^2 x_i \ln x_i - 2h^2 x_i^2, \\ y_0 = 0, \quad y_n = 0. \end{aligned}$$

Sistem, ki ga moramo rešiti, je

$$\begin{bmatrix} -4x_1^2-6h^2 & 2x_1^2-x_1h & & \\ 2x_2^2+x_2h & -4x_2^2-6h^2 & 2x_2^2-x_2h & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2x_{n-2}^2-x_{n-2}h \\ & & 2x_{n-1}^2+x_{n-1}h & -4x_{n-1}^2-6h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h^2x_1\ln x_1-2h^2x_1^2 \\ 2h^2x_2\ln x_2-2h^2x_2^2 \\ \vdots \\ 2h^2x_{n-2}\ln x_{n-2}-2h^2x_{n-2}^2 \\ 2h^2x_{n-1}\ln x_{n-1}-2h^2x_{n-1}^2 \end{bmatrix}.$$

14. Robni problem

$$y'' = (y')^2 + y\sin x,\ y(0)=1,\ y(1)=2$$

rešite s strelsko metodo.

Rešitev. Najprej prevedimo problem na reševanje začetnega problema, ki ga bomo reševali z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ z^2+y\sin x \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix}.$$

Ta sistem rešimo za različne v. Želimo dobiti rešitev, pri kateri bo približek za $y(1)$ čim bližje 2. Rezultati, ki jih vrne Octave pri $h=0.2$:

izbrani v	0	1	0.5	0.3	0.4	0.48
približek y_1	1.1724	18.9775	2.0477	1.6067	1.8039	1.9941
izbrani v	0.49	0.485	0.482	0.483	0.4823	0.4822
približek y_1	2.0206	2.0073	1.9994	2.0020	2.0001	1.9999

Torej je rešitev robnega problema rešitev začetnega problema za $v = 0.48225$. Običajno postopek izbire v delamo z bisekcijo, kjer določimo želeno natančnost.

15. Robni problem

$$y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0,\ 1 \le x \le 2,\ y(1)=y(2)=0$$

rešite s strelsko metodo.

Rešitev. Najprej prevedimo problem na reševanje začetnega problema, ki ga bomo reševali z Runge-Kutta metodo reda 4,

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z \\ -e^{-xy} - \sin z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}.$$

Ta sistem rešimo za različne v. Želimo dobiti rešitev, pri kateri bo približek za $y(2)$ čim bližje 0. Rezultati, ki jih vrne Octave pri $h = 0.2$:

izbrani v	0	1	0.5	0.8
približek y_1	-0.3316017	0.1546324	-0.0814838	0.06149417
izbrani v	0.7	0.6	0.65	0.67
približek y_1	0.0143007	-0.0333452	-0.00946340	0.00005610
izbrani v	0.66	0.665	0.669	0.6698
približek y_1	-0.0047013	-0.0023220	-0.000419430	-0.00003900

Torej je rešitev robnega problema rešitev začetnega problema za $v = 0.6698$.

Poglavje 15

Uporabljeni programi

Datoteka bisekcija.m.

```
function x = bisekcija(f,a,b,natancnost)

% vrednosti na robovih zacetnega intervala
fa = f(a);
fb = f(b);

% koncamo, ce interval ni dober (funkcija na robovih ni
% razlicno predznacena)
if sign(fa)==sign(fb)
    disp('Interval ni dober!')
    return
end

% ponavljamo dokler ne bo 'dovolj natancno'
while abs(a-b) > natancnost
    % izracunamo razpolovisce intervala in vrednost funkcije
    % v tej tocki
    c = (a+b)/2;
    fc = f(c);

    % ce je v razpoloviscu funkcija istega predznaka kot
    % v desnem krajiscu, je razpolovisce novo desno krajisce
    if sign(fc)==sign(fb)
        b=c;
        fb=fc;
    % ce je v razpoloviscu funkcija istega predznaka kot
```

```
    % v levem krajiscu, je razpolovisce novo levo krajisce
    else
        a=c;
        fa=fc;
    end
end
% iskani priblizek za niclo je razpolovisce zadnjega intervala
x = (a+b)/2;
```

Datoteka iteracija.m.

```
function y = iteracija(g,x0,n)
% vrne vektor prvih n priblizkov, ki jih dobimo z navadno
% iteracijo pri iteracijski funkciji g in zacetnem
% priblizku x0

y = zeros(n,1);
y(1,1) = x0;
for i=2:n
    y(i,1) = g(y(i-1,1));
end
```

Datoteka newton.m.

```
function y=newton(F,JF,x0,n)
% vrne priblizek, ki ga dobimo po n korakih newtonove
% metode za dano funkcijo F, pripadajoco jacobijevo
% matriko JF in zacetni priblizek x0
% metoda izpisuje vmesne korake
xn=x0;
for i = 2:n
    x0=xn;
    deltax=-JF(x0)\F(x0);
    xn=x0+deltax;
    disp(sprintf('%15.15f  ',xn'));
end
y=xn;
```

Datoteka testnewton1.m.

```
% zgled za resevanje nelinearnega sistema z Newtonovo metodo
% iscemo presecisce dveh krivulj
% x^2+y^2-10x+y=1 in x^2-y^2-x+10y=25.
```

```
% najprej narisemo krivulji, na ta nacin lahko poiscemo
% zacetni priblizek
[X,Y]=meshgrid(-10:0.1:15,-10:0.1:15);

Z1=X.^2+Y.^2-10*X+Y-1;
Z2=X.^2-Y.^2-X+10*Y-25;

contour(X,Y,Z1,[0 0]);
hold on
contour(X,Y,Z2,[0 0],'b');
hold off

disp('Pritisni enter')
pause
% definiramo ustrezno funkcijo in jacobijevo matriko
F=@(x) [x(1)^2+x(2)^2-10*x(1)+x(2)-1;
    x(1)^2-x(2)^2-x(1)+10*x(2)-25];
JF=@(x) [2*x(1)-10, 2*x(2)+1; 2*x(1)-1, -2*x(2)+10];

% uporabimo Newtonovo metodo z zacetnim priblizkom [2;4]
newton(F,JF,[2;4],20)

disp('Pritisni enter')
pause
%uporabimo Newtonovo metodo z zacetnim priblizkom [9;-3]
newton(F,JF,[9;-3],20)
```

Datoteka jacobi.m.

```
function x = jacobi(A,b,x0,delta,maxsteps)
    % Resi sistem Ax = b z zacetnim priblizkom x0 po metodi
    % Jacobijeve iteracije. Iteracija se konca, ko se zadnja
    % priblizka razlikujeta za manj kot delta ali ko
    % prekoracimo maksimalno stevilo korakov maxsteps. Ce
    % zadnjih dveh argumentov ne podamo, je privzeta vrednost
    % za delta osnovna zaokrozitvena napaka eps, za maxsteps
    % pa 50.

    if nargin<4, delta=eps; end
    if nargin<5, maxsteps=50; end
```

```
    d = diag(A);
    if ~all(d)
        error 'Element na diagonali je enak 0.'
    end

    invD = diag(d.^-1);
    Aoff = A - diag(d);

    xn=invD*(-Aoff*x0 + b);
    korak = 1;
    while (norm(xn - x0) >= delta) && (korak<maxsteps)
        korak = korak + 1;
        x0 = xn;
        xn = invD*(-Aoff*x0 + b);
        disp(sprintf('%15.15f  ',x0'));
    end
    x = xn;
    disp(sprintf('Število korakov je %d.',korak));
end
```

Datoteka gauss_seidel.m.

```
function x = gauss_seidel(A,b,x0,delta,maxsteps)
    % Resi sistem Ax = b z zacetnim priblizkom x0 po metodi
    % Gauss-Seidlove iteracije. Iteracija se konca, ko se
    % zadnja priblizka razlikujeta za manj kot delta ali ko
    % prekoracimo maksimalno stevilo korakov maxsteps. Ce
    % zadnjih dveh argumentov ne podamo, je privzeta vrednost
    % za delta osnovna zaokrozitvena napaka eps, za maxsteps
    % pa 50.

    if nargin<4, delta=eps; end
    if nargin<5, maxsteps=50; end

    d = diag(A);
    if ~all(d)
        error 'Element na diagonali je enak 0.'
    end

    D = diag(d);
    L = tril(A) - D;
    U = triu(A) - D;
```

```
    %(L+D)*xn = -U*x0 + b
    xn = (L+D)\(-U*x0+b);
```

Datoteka test_iteracija_linsist.m.

```
% Zgleda iz iterativnega resevanja sistemov linearnih enacb.

A = [7,-2,1,2; 2,8,3,1; -1,0,5,2; 0,2,-1,4];
b = [3;-2;5;4];
x0 = zeros(4,1);

disp('Tocna resitev:')
A\b

disp('Jacobi:')
jacobi(A,b,x0,10^(-10))

disp('Gauss-Seidel:')
gauss_seidel(A,b,x0,10^(-10))

disp('Pritisni enter za naslednji primer')
pause

A = [2,8,3,1; 0,2,-1,4; 7,-2,1,2; -1,0,5,2];
b= [-2;4;3;5];

disp('Tocna resitev:')
A\b

disp('Jacobi:')
jacobi(A,b,x0,10^(-10))

disp('Gauss-Seidel:')
gauss_seidel(A,b,x0,10^(-10))
```

Datoteka test_iteracija_konvergenca.m.

```
% Test hitrosti konvergence Jacobijeve in
% Gauss-Seidlove iteracije.

A = [10,-1,2,0; -1,11,-1,3; 2,-1,10,-1; 0,3,-1,8];
```

```
b = [6;25;11;15];
x0 = zeros(4,1);
delta = 10^(-10);

disp('Tocna resitev:')
A\b

disp('Jacobi:')
jacobi(A,b,x0,delta)

disp('Gauss-Seidel:')
gauss_seidel(A,b,x0,delta)
```

Datoteka monteCarlo.m.

```
function I = monteCarlo(N)
% Izracuna numericni priblizek za vrednost integrala
% int_0^1 int_0^1 int_0^1 1/(1+x+2y+3z)
% s pomocjo Monte-Carlo metode na N tockah.

I = 0;
for i = 1:N
    x = rand(1, 3);
    I = I + 1/(1+x(1)+2*x(2)+3*x(3));
end
I = 1/N*I;
```

Datoteka potencna.m.

```
function [x,rho] = potencna(A,x0,n)
% naredi n korakov potencne metode za racunanje lastnih
% vrednosti za matriko A z zacetnim priblizkom x0
% za zadnji izracunani priblizek izracuna vrednost
% Rayleighovega koeficienta
% program izpisuje vmesne priblizke za x

x = x0;
for i = 1:n
    disp(x);
    x1 = A*x;
    x = x1/norm(x1);
end
rho = x'*A*x;
```

Datoteka testPotencna.m.

```
% testira delovanje potencne metode na primerih

A = [1,0;4,8];
B = [5,-6;-2,1];
C = [-8,3;-6,3];
D = [-6,2;-3,1];
E = [3,5;1,-1];
F = [5,0;2,-2];
G = [3,7;2,-2];
H = [2,-4;1,-3];
J = [-2,-9;-2,1];
K = [2,6;1,3];

% izberemo nakljucen zacetni priblizek
x0 = rand(2,1);

% za vsako matriko naredimo 10 korakov
disp('Matrika A:')
[x,rho] = potencna(A,x0,10)
pause
disp('Matrika B:')
[x,rho] = potencna(B,x0,10)
pause
disp('Matrika C:')
[x,rho] = potencna(C,x0,10)
pause
disp('Matrika D:')
[x,rho] = potencna(D,x0,10)
pause
disp('Matrika E:')
[x,rho] = potencna(E,x0,10)
pause
disp('Matrika F:')
[x,rho] = potencna(F,x0,10)
pause
disp('Matrika G:')
[x,rho] = potencna(G,x0,10)
pause
disp('Matrika H:')
```

```
[x,rho] = potencna(H,x0,10)
pause
disp('Matrika J:')
[x,rho] = potencna(J,x0,10)
pause
disp('Matrika K:')
[x,rho] = potencna(K,x0,10)
```

Datoteka testPotencnaKonv.m.

```
% preverimo, da komponente vektorjev konvergirajo k
% dominantni lastni vrednosti

A = hilb(5);

% izračunamo dominantno lastno vrednost
last = eig(A);
[l,ind] = sort(abs(last));
disp('Dominantna lastna vrednost: ')
dom = last(ind(end))

% poenostavljena potencna metoda, 15 korakov, nakljucen
% zacetni priblizek
x0 = rand(5,1);
disp('Priblizki: ')
for i = 1:15
    x1 = A*x0;
    x1./x0
    x0 = x1;
end
```

Datoteka hoteling.m.

```
% izracunamo vse lastne vrednosti matrike
% s pomocjo Hotelingove redukcije

A1 = hilb(5);
A=A1;

% izracunamo dominantno lastno vrednost
[x1,rho1] = potencna(A, rand(5,1),20)
% Hotelingova redukcija
```

```
A = A - rho1*x1*x1';
% naslednja lastna vrednost
[x2,rho2] = potencna(A,rand(5,1),20)
% Hotelingova redukcija
A = A - rho2*x2*x2';
% naslednja lastna vrednost
[x3,rho3] = potencna(A,rand(5,1),20)
% Hotelingova redukcija
A = A - rho3*x3*x3';
% naslednja lastna vrednost
[x4,rho4] = potencna(A,rand(5,1),20)
% Hotelingova redukcija
A = A - rho4*x4*x4';
% naslednja lastna vrednost
[x5,rho5] = potencna(A,rand(5,1),20)

disp('Lastne vrednosti, izracunane s Hotelingovo redukcijo
in potencno metodo:')
[rho1,rho2,rho3,rho4,rho5]
disp('Lastne vrednosti, izracunane s funkcijo eig:')
eig(A1)
```

Datoteka invPotencna.m.

```
function [x,rho] = invPotencna(A,x0,sigma,n)
% naredi n korakov inverzne potencne metode za racunanje
% lastnih vrednosti matrike A v blizini sigma z zacetnim
% priblizkom x0
% za zadnji izracunani priblizek izracuna vrednost
% Rayleighovega koeficienta
% program izpisuje vmesne priblizke za x

I = eye(length(A));
x = x0;
for i = 1:n
    disp(x);
    x1 = (A-sigma*I)\x;
    x = x1/norm(x1);
end
rho = x'*A*x;
```

Datoteka kubicnigraf.m.

```
function G = kubicnigraf()

G=[ 1     4    22    11
    2    31     9     3
    3     2    23     4
    4     1     3    15
    5     8    10    13
    6    12    21     7
    7     6    20     8
    8     5     7    26
    9     2    18    28
    10     5    14    25
    11     1    16    12
    12     6    11    13
    13     5    12    17
    14    10    17    29
    15     4    32    16
    16    11    15    17
    17    13    14    16
    18     9    23    19
    19    18    27    20
    20     7    19    21
    21     6    20    22
    22     1    21    23
    23     3    18    22
    24    28    30    25
    25    10    24    26
    26     8    25    27
    27    19    26    28
    28     9    24    27
    29    14    32    30
    30    24    29    31
    31     2    30    32
    32    15    29    31];
```

Datoteka gplot3.m.

```
function [Xout,Yout,Zout] = gplot3(A,xyz,lc)
% GPLOT Plot graph, as in "graph theory".
% GPLOT(A,xyz) plots the graph specified by A and xyz.
% A graph, G, is a set of nodes numbered from 1 to n, and a
% set of connections, or edges, between them.
```

```
%
% In order to plot G, two matrices are needed. The adjacency
% matrix, A, has a(i,j) nonzero if and only if node i is
% connected to node j. The coordinates array, xyz, is an n-by-2
% or n-by-3 matrix with the position for node i in the i-th
% row, xyz(i,:) = [x(i) y(i)] or xyz(i,:) = [x(i) y(i) z(i)].
% The plot uses the 2-dimensional view.
%
% GPLOT(A,xyz,LineSpec) uses line type and color specified in
% the string LineSpec. See PLOT for possibilities.
%
% [X,Y] = GPLOT(A,xyz) or [X,Y,Z] = GPLOT(A,xyz) return the
% NaN-punctuated vectors X and Y or X, Y and Z without
% actually generating a plot. These vectors can be used to
% generate the plot at a later time with PLOT or PLOT3 if
% desired.
%
% See also SPY, TREEPLOT.

% A backward-compatible elaboration of Mathworks's gplot
% that uses 3D data (if available) when the plot is rotated.
% Robert Piche, Tampere Univ. of Tech., 2005

[i,j] = find(A);
[ignore, p] = sort(max(i,j));
i = i(p);
j = j(p);

% Create a long, NaN-separated list of line segments,
% rather than individual segments.

if size(xyz,2)<3, xyz(:,3) = 0; end
X = [ xyz(i,1) xyz(j,1) repmat(NaN,size(i))]';
Y = [ xyz(i,2) xyz(j,2) repmat(NaN,size(i))]';
Z = [ xyz(i,3) xyz(j,3) repmat(NaN,size(i))]';
X = X(:);
Y = Y(:);
Z = Z(:);

if nargout==0,
    if nargin<3,
```

```
        plot3(X, Y, Z);
    else
        plot3(X, Y, Z, lc);
    end
    view(2), box on
else
    Xout = X;
    Yout = Y;
    Zout = Z;
end
```

Datoteka risanjeGrafa.m.

```
function risanjeGrafa(G)
% narise lepo sliko kubicnega poliedrskega grafa
% podatki oblike kot v kubicnigraf.m

% izracunamo matriko sosednosti A
n = length(G);
A = zeros(n);
for i = 1:n
    % dolocimo indekse sosedov i-te tocke
    a1 = G(i,2);
    a2 = G(i,3);
    a3 = G(i,4);
    % na mesta sosedov zapisemo enice
    A(i,a1) = 1;
    A(i,a2) = 1;
    A(i,a3) = 1;
end

% izracunamo lastne vektorje matrike A
[v,l] = eig(A);
% uredimo po velikosti
[last,ind] = sort(abs(l));

% vektorji, ki pripadajo lambda2, lambda3, lambda4
x = v(:,ind(end-1));
y = v(:,ind(end-2));
z = v(:,ind(end-3));

% dolocimo koordinate tock
```

```
xyz = [x y z];

% narisemo sliko
gplot3(A,xyz)

hold on
% narisemo tocke
h = plot3(x,y,z,'o');
set(h,'Color','red','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor',
'red','MarkerSize',4)
box off
```

Literatura

[1] Spletna stran s programi http://www.fmf.uni-lj.si/~jaklicg/nalogeNM/

[2] Bohte, Z.: Numerične metode. DMFA, Ljubljana (1991).

[3] Bohte, Z.: Numerično reševanje enačb. DMFA, Ljubljana (1986).

[4] Bohte, Z.: Numerično reševanje nelinearnih enačb. DMFA, Ljubljana (1993).

[5] Bohte, Z.: Numerično reševanje sistemov linearnih enačb. DMFA, Ljubljana (1994).

[6] Bohte, Z.: Uvod v numerično računanje. DMFA, Ljubljana (1995).

[7] Demmel, J.W.: Uporabna numerična linearna algebra. DMFA, Ljubljana (2000).

[8] Kozak, J.: Numerična analiza. DMFA, Ljubljana (2008).

[9] Orel, B.: Osnove numerične matematike. FRI, Ljubljana (2004).