1. izpit iz OPTIMIZACIJSKIH METOD

1. julij 2009

1. Mobilni operater gradi novo GSM omrežje. V ta namen bodo po vsej državi postavili bazne postaje. Ozemlje države je povezana ravninska množica $A \subset \mathbb{R}^2$. Vsaka bazna postaja pokriva območje v obliki kroga s polmerom r kilometrov (krog lahko sega tudi v tujino, samo središče mora biti v državi). S signalom je potrebno pokriti celotno ozemlje države. Cena izgradnja ene postaje je c evrov in je za vse postaje enaka.

   Dodaten zaplet predstavljajo zakupljene frekvence. Operater ima zakupljenih k različnih GSM frekvenc. Območji, ki jih pokrivata dve bazni postaji z isto frekvenco se ne smeta pokrivati, saj v nasprotnem primeru pride do hudih motenj signala zaradi interference.

   Formuliraj kot optimizacijsko nalogo! Cilj je seveda zgraditi omrežje čim ceneje.

2. (IŠRM) Naj bodo $p_1, \ldots, p_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearne funkcije, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Definiramo optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min)

$$P(x) = \max_{i=1\ldots k} p_i(x)$$

$$\Phi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}.$$

   (a) Dokaži, da je naloga konveksna.

   (b) Najdi nalogo linearnega programiranja, ki je enakovredna nalogi (Φ, P, Min).

2. (FRI) Za katere vrednosti parametrov $a, b \in \mathbb{R}$ je naloga (Φ, P, Min) konveksna?

$$P(x, y, z) = x^2 + by^2 + z^2 + ayz$$

$$\Phi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \geq a(x^2 + y^2) + b\right\}$$

3. S pomočjo Karush-Kuhn-Tuckerjevega izreka reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min),

$$P(x, y) = x - 3y$$

$$\Phi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x - y \geq 0\right\}$$

4. Reši problem linearnega programiranja (Φ, P, Min),

$$P(x, y, z) = 5x - y + 3z$$

   območje $\Phi \subseteq \mathbb{R}^3$ pa je določeno z neenačbami

$$\begin{aligned} x + y + 2z &\leq 3 \\ x - 2y + z &\geq 1 \\ x + 2z &\geq 1 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$