Izpit iz OPTIMIZACIJSKIH METOD

28. junij 2010

1. Mednarodna korporacija za trgovanje z dragimi kovinami mora v prepeljati 40 ton srebra iz Singapura v Amsterdam. Zaradi potrebe po čimprejšnji dostavi, pa tudi zaradi strahu pred pirati v indijskem oceanu, bodo tovor prepeljali z letalom. Za prevoz so primerne štiri letalske družbe: Air Arabia, Bangkok Air, Chinese Airlines in Dutch Cargo. Žal nobena ne leti direktno iz Singapura v Amsterdam, pač pa Bangkok Air in Chinese Airlines letita iz Singapura v Dubaj, Air Arabia in Dutch Cargo pa iz Dubaja v Amsterdam, tako da bodo morali tovor v Dubaju pretovoriti iz letal prvih dveh prevoznikov na letala drugih dveh. Cene prevoza so odvisne od količine naloženega tovora in znašajo:

   - za Air Arabia: 1300\$/tono do 12 ton, 1600\$/tono za vsako nadaljno tono
   - za Bangkok Air: 1100\$/tono do 14 ton, 1800\$/tono za vsako nadaljno tono
   - za Chinese Airlines: 1000\$/tono do 8 ton, 2000\$/tono za vsako nadaljno tono
   - za Dutch Cargo: 1400\$/tono do 18 ton, 1800\$/tono za vsako nadaljno tono

   Kako naj naložijo srebro na letala, da bo prevoz čim cenejši? Zapiši nalogo kot linearni program.

2. (IŠRM) Imamo naslednjo optimizacijsko nalogo: v trikotniku na ravnini iščemo točko, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču. Formuliramo jo kot optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min),

$$\Phi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a_1x + b_1y \leq c_1 \wedge a_2x + b_2y \leq c_2 \wedge a_3x + b_3y \leq c_3\right\},$$
$$P(x,y) = x^2 + y^2.$$

   Najdi po Lagrangeu prirejeno nalogo. Kdaj sta nalogi dualni?

   Dodatno. Naloga je poseben primer splošnejše naloge, ki je definirana pri dani matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in vektorju $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ kot optimizacijska naloga (Φ, P, Min),

$$\Phi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\},$$
$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x}.$$

   (T.j. iščemo izhodišču najbližjo točko v poljubnem konveksnem poliedru.) Če najdeš Lagrangeovo prirejenko splošnejši nalogi, dobiš 5 bonus točk.

2. (FRI) Pri katerih vrednostih $a, b \in \mathbb{R}$ je spodaj podana funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konveksna?

$$f(x,y) = ax^2 + (2a-b)xy + y^2 + \frac{bx}{y} + ax + b$$

3. Reši optimizacijsko nalogo (Φ, P, Min),

$$P(x,y) = x + y$$
$$\Phi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 3y^2 \leq 12 \wedge 2x + y \geq 1 \wedge x + 4y \geq 2\right\}.$$

4. Z uporabo metode simpleksov reši problem linearnega programiranja (Φ, P, Min), kjer je

$$P(x,y,z) = 3x - 2y + 5z$$

   območje Φ pa je določeno z neenačbami

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &\geq 1 \\ 3x + y + 2z &\leq 4 \\ z &\leq 2 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$